Olympische competitie
Mei 2007

1. Los op naar $x \in \mathbb{R}_0^+$:
$$x^{x^{2007}} = 2007.$$

2. Een convexe vierhoek wordt door zijn twee diagonalen verdeeld in vier driehoeken, elk met een natuurlijk getal als oppervlakte. Bewijs dat het product van de vier oppervlakten van deze driehoeken een volkomen kwadraat is.

3. Zij $n \in \mathbb{N}$ zodat $6n^2 + 5n + 1$ een volkomen kwadraat is. Bewijs dat n deelbaar is door 40.

4. Een *binair woord van lengte* n is een "getal" van de vorm $a_1 a_2 \cdots a_n$ met $a_i \in \{0, 1\}$ $(\forall i)$.
Zij $\mathcal{B}$ een verzameling van binaire woorden van lengte n zodat elke twee woorden in $\mathcal{B}$ op minstens 3 plaatsen verschillen. Bewijs dat het aantal elementen van $\mathcal{B}$ niet groter is dan $\frac{2^n}{n+1}$.

5. Construeer een oneindige verzameling $\mathcal{S}$ van natuurlijke getallen waarvoor geldt:

$3^{n-1} - 2^{n-1}$ is deelbaar door n voor alle $n \in \mathcal{S}$, en $\mathcal{S}$ bevat geen priemgetallen.