Olympische competitie
April 2007

1. Bepaal het grootste natuurlijk getal n met de volgende eigenschap:

   er bestaat een reëel getal x zodat $2^j < x^j + x^{j+1} < 2^{j+1}$ voor $j = 1, 2, \cdots, n$.

2. Beschouw de volgende definitie:

   Zijn $a \geq 2$ een natuurlijk getal. Een natuurlijk getal n is *pseudopriem* ten opzichte van basis a als n niet priem is en als bovendien $a^{n-1} - 1$ deelbaar is door n.

   De Fermat-getallen $F_0, F_1, F_2, \cdots$ worden gedefinieerd door $F_n = 2^{2^n} + 1$. Fermat dacht dat de rij van Fermat-getallen enkel uit priemgetallen bestond, maar later bleek dat F_5 deelbaar is door 641 (en dus niet priem is). Men weet op dit moment zelfs niet of er wel oneindig veel priemgetallen voorkomen in de rij van Fermat-getallen. Troost Fermat door de volgende bewering te bewijzen: zelfs als het Fermat-getal F_n (voor een zeker natuurlijk getal n) geen priemgetal is, dan is F_n in elk geval wel een pseudopriemgetal ten opzichte van basis 2.

3. Beschouw een vierkant met zijden van lengte z en veronderstel dat er een eindig aantal cirkels binnen dit vierkant wordt geplaatst, zodanig dat de som van de omtrekken van al deze cirkels gelijk is aan $10z$. Bewijs dat er een rechte bestaat die minstens vier van deze cirkels snijdt.

4. Zijn A en B punten in het vlak. Zijn $P_1, P_2, \cdots, P_6$ punten aan dezelfde kant van AB zodat

   $$\Delta P_1AB \sim \Delta AP_2B \sim \Delta ABP_3 \sim \Delta P_4BA \sim \Delta BP_5A \sim \Delta BAP_6.$$

   Bewijs dat $P_1, P_2, \cdots, P_6$ op een cirkel liggen.

5. Zij $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$ een functie zodat $f(xy) \leq f(x)f(y)$ voor alle $x, y \geq 0$. Bewijs dat

   $$f\left(x^n\right) \leq f(x) \cdot f\left(x^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot f\left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} \cdots f\left(x^n\right)^{\frac{1}{n}}$$

   voor alle $x \geq 0$ en voor alle $n \in \mathbb{N}_0$.