Olympische competitie
Maart 2007

1. Zij ΔABC een driehoek en zij P een punt binnen deze driehoek. Zijn O_A, O_B en O_C de middelpunten van de omgeschreven cirkels van ΔPBC, ΔPCA en ΔPAB respectievelijk. Veronderstel dat $O_A \in AP$ en $O_B \in BP$. Bewijs dat $O_C \in CP$.

2. Zij $p(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ een reële veelterm met drie reële wortels. Bewijs dat
$$2a^3 - 9ab + 27c = 0$$
als en slechts als deze drie wortels een rekenkundige rij vormen.

3. Zij ΔABC een driehoek. Zij h_A de lengte van de hoogtelijn door A en definieer h_B en h_C analoog. Bewijs dat ΔABC gelijkzijdig is als en slechts als $AB + h_C = BC + h_A = CA + h_B$.

4. Bepaal
$$\max_{x,y\in\mathbb{R}_0^+} \left\{ \min \left\{ x, \frac{1}{y}, y + \frac{1}{x} \right\} \right\}$$
en bewijs je antwoord.[1]

5. Convergeert de volgende reeks?
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\varphi(n)^2}$$
Bewijs je antwoord.[2]

---

[1]Met andere woorden: voor alle $x, y > 0$ definiëren we $f(x, y)$ als het kleinste van de drie getallen x, $\frac{1}{y}$ en $y + \frac{1}{x}$. Wat is nu de grootste waarde die de functie $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ aanneemt?

[2]Als $a_1, a_2, \cdots$ een rij van reële getallen is, dan zeggen we dat de reeks $a_1 + a_2 + \cdots$ convergeert indien er een reëel getal α bestaat (de *limiet* van de reeks) zodanig dat $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \to \alpha$ als $n \to \infty$. De functie $\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 : n \mapsto \varphi(n)$ is de *indicator van Euler*. Het getal $\varphi(n)$ is het aantal natuurlijke getallen in $\{1, 2, \cdots, n\}$ dat onderling ondeelbaar is met n. Als $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$ de ontbinding van n is in priemfactoren, dan is
$$\varphi(n) = (p_1 - 1)\, p_1^{\alpha_1 - 1}\, (p_2 - 1)\, p_2^{\alpha_2 - 1} \cdots (p_k - 1)\, p_k^{\alpha_k - 1}.$$
Om de opgave op te lossen mag je bovendien (zonder bewijs) nog gebruik maken van de volgende resultaten.

- Als $a_1, a_2, \cdots$ een rij van positieve reële getallen is, en als er een rij $b_1, b_2, \cdots$ van reële getallen bestaat zodat $a_j \leq b_j$ voor alle j en zodat de reeks $b_1 + b_2 + \cdots$ convergeert, dan convergeert ook de reeks $a_1 + a_2 + \cdots$.
- De reeks $1^{-p} + 2^{-p} + 3^{-p} + 4^{-p} + \cdots$ convergeert als en slechts als $p > 1$.