Olympische competitie
December 2006

1. Bepaal alle paren functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodanig dat

$$f(x) + g(y) = x^2 + xy^3 + y^7$$

voor alle reële getallen x en y.

2. Zij ΔABC een scherphoekige driehoek en zij O het middelpunt van de omgeschreven cirkel. Zijn M, N de snijpunten van de omgeschreven cirkel van ΔABO met AC en BC respectievelijk. Bewijs dat de omgeschreven cirkels van ΔABO en ΔMNC dezelfde straal hebben.

3. Zij $\mathcal{A}$ een deelverzameling van $\mathbb{N}_0$ zodanig dat

$$25\,|m-n| \geq mn,\ \forall m,n \in \mathcal{A}\ (m \neq n).$$

Bepaal het grootst mogelijke aantal elementen van $\mathcal{A}$.

4. Zij $(a_n)_{n\geq 1}$ en rij met $a_1 = 2$ en

$$a_{n+1} = \left[\frac{2007a_n}{2}\right],$$

waarbij we $[x]$ noteren voor het grootste geheel getal, kleiner dan of gelijk aan x.
Definieer de rij (b_n) door $b_n = (-1)^{a_n}$, voor alle n.

   (a) Bewijs dat de rij (a_n) oneindig veel even en oneindig veel oneven termen bevat.

   (b) Bewijs dat de rij (b_n) niet periodiek is.

5. Zijn $n_0, n_1, n_2, \cdots, n_k$ gehele getallen met $n_0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. Bewijs dat

$$\prod_{0\leq i<j\leq k} \frac{n_j - n_i}{j - i}$$

eveneens een geheel getal is.