

Olympische competitie

September 2006

1. Zij $\triangle ABC$ een driehoek zodat $\angle A > 90^\circ$. Zijn P en Q punten op de zijde BC zodanig dat $\angle BAP = \angle PAQ$ en $BP \cdot CQ = BC \cdot PQ$. Bepaal de grootte van $\angle PAC$.

2. Zij

$$\alpha = 0.d_1d_2d_3 \cdots \quad \text{met } d_1, d_2, d_3, \dots \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$$

de decimale voorstelling van een reëel getal α tussen 0 en 1 en zij $r \in \mathbb{R}$ zodat $|r| < 1$.

(a) Stel dat α en r rationaal zijn. Volgt daaruit dat $\sum_{i=1}^{\infty} d_i r^i$ rationaal is?

(b) Stel dat r en $\sum_{i=1}^{\infty} d_i r^i$ rationaal zijn (en $r \neq 0$). Volgt daaruit dat α rationaal is?

3. In driehoek $\triangle ABC$ geldt dat $\angle A > \angle B > \angle C$. Zij O het middelpunt van de omgeschreven cirkel, zij I het middelpunt van de ingeschreven cirkel en zij D het midden van BC . Zij M het midden van de cirkelboog BC die A niet bevat. Zij F een punt op ID zodat D het midden is van IF . Zij Q het snijpunt van MF met de omgeschreven cirkel.

(a) Toon aan dat Q op de cirkelboog AC ligt die B niet bevat.

(b) Toon aan dat $AQ - BQ + CQ = 0$.

4. Bepaal alle functies $f : \{2, 3, 4, \dots\} \rightarrow \mathbb{Q}$ zodat

- $f(2^m) = \frac{1}{m}$ voor alle natuurlijke getallen $m \geq 1$,
- $f(2n-1)f(2n) = f(n)$ voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$, en
- $f(2n)f(2n+1) = f(2^m+n)$ voor alle natuurlijke getallen m en n met $2^m > n \geq 1$.

Bereken ook alle mogelijke waarden van $f(2006)$.

5. Zij p een priemgetal. Bewijs dat er een natuurlijk getal n bestaat zodat er minstens 2006 opeenvolgende cijfers 0 voorkomen in de decimale schrijfwijze van p^n .