

Olympische competitie

Augustus 2006

Oplossingen

1. *De eerste vraag was erg eenvoudig en combineerde enkele bekende ideeën: invariantie, en een pariteitsargument. Alle deelnemers losten de vraag op.*

We mogen veronderstellen dat de hoekpunten van de kubus coördinaten van de vorm $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ hebben, met elke $\epsilon_i \in \{0, 1\}$, en dat het achtste (ontbrekende) hoekpunt coördinaten $(1, 1, 1)$ heeft. We noemen een punt met gehele coördinaten een roosterpunt. Door een roosterpunt (a, b, c) te spiegelen in een ander roosterpunt (x, y, z) krijgen we natuurlijk een nieuw roosterpunt $(2x - a, 2y - b, 2z - c)$. Bijgevolg geldt er dat het spiegelen van een roosterpunt, in een ander roosterpunt, niks verandert aan de pariteit van de coördinaten van dat punt. Omdat het punt $(1, 1, 1)$ drie oneven coördinaten heeft, en omdat elk van de 7 gegeven punten minstens één even coördinaat heeft, zien we dat we het achtste hoekpunt nooit kunnen verkrijgen uit de andere 7 door middel van puntspiegelingen. ■

2. *Deze vraag was eenvoudig en elementair, maar geen enkele deelnemer gaf een oplossing zonder goniometrie! De mooiste oplossing was nog die van Clara Mertens, van sommige oplossingen (van twee niet nader genoemde leden van het IMO 2006-team) heb ik nog steeds nachtmerries...*

Stel (zonder verlies van de algemeenheid) dat $AB \geq CD$ en zij $k = AB/CD \geq 1$. Zij S het snijpunt van de diagonalen AC en BD . Omdat $\triangle SAB \sim \triangle SDC$ is $AS/DS = BS/CS = k$. Bijgevolg is $AC - BD = AS + SC - BS - SD = kDS + CS - kCS - DS = (k - 1)(DS - CS)$. Stel zonder verlies van de algemeenheid dat $DS \geq CS$. Dan is

$$\begin{aligned} |AB - CD| - |AC - BD| &= AB - CD - AC + BD \\ &= (k - 1)CD - (k - 1)(DS - CS) \\ &= (k - 1)(CD + CS - DS) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

wegens de driehoeksongelijkheid (en $k \geq 1$). Daaruit volgt het resultaat. ■

3. *Dit was een schitterende vraag waar creatievelingen zich konden uitleven... Spijtig genoeg deed niemand dat, behalve misschien Arne Loosveldt - al was zijn oplossing niet zo elegant als de onderstaande oplossing. Alle andere oplossingen waren te technisch en niet zo mooi.*

Beschouw voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ de verzameling $\mathcal{S}_n = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}_0, a \geq 2, a^b \leq n\}$. Door voor elke a het aantal mogelijke waarden van b te bepalen, vinden we dat het aantal elementen van \mathcal{S}_n gelijk is aan $\lfloor \log_2 n \rfloor + \lfloor \log_3 n \rfloor + \dots + \lfloor \log_n n \rfloor$. Door voor elke b het aantal a -waarden te bepalen, zien we dat \mathcal{S}_n precies $(n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor) - n = \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor$ elementen heeft. Daaruit volgt het resultaat natuurlijk onmiddellijk. ■

Doordenker: waarom staat er in deze oplossing $(n + \lfloor \sqrt{n} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor + \dots + \lfloor \sqrt[n]{n} \rfloor) - n$?

4. *Misschien wel de bizarste vraag die ooit in de olympische competitie werd gesteld. De oplossing die ik voorstel is elegant en vrij kort, maar alle deelnemers die er in slaagden om deze vraag op te lossen (en dat waren er eigenlijk niet zo veel) gaven een lange en saaie oplossing.*

Het resultaat zal steeds een breuk van de vorm $\frac{A}{B}$ zijn, met

$$AB = 29! = 2^{25} \cdot 3^{13} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29.$$

De priemgetallen met een oneven exponent in dit product kunnen niet “verdwijnen” uit de verhouding $\frac{A}{B}$ (na vereenvoudiging). Bijgevolg is $\frac{A}{B} \geq 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 = 1292646$ als de breuk een geheel getal is. Anderzijds hebben we ook dat

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{29}{15}\right)^{\epsilon_1} \left(\frac{28}{14}\right)^{\epsilon_2} \cdots \left(\frac{16}{2}\right)^{\epsilon_{14}}$$

waarbij $\epsilon_i \in \{-1, 1\}$ voor elke i . Natuurlijk geldt er zeker dat $\epsilon_1 = 1$ en $\epsilon_2 = -1$. Omdat de breuken $\frac{27}{13}, \frac{26}{12}, \dots, \frac{16}{2}$ groter zijn dan 1, geldt er dat

$$\frac{A}{B} \leq \frac{29}{15} \cdot \frac{14}{28} \cdot \frac{27}{13} \cdot \frac{26}{12} \cdot \dots \cdot \frac{16}{2} = 1292646$$

(of $\frac{A}{B}$ nu een natuurlijk getal is of niet). Met andere woorden, als $\frac{A}{B}$ een natuurlijk getal is, dan *moet* er gelden dat $\frac{A}{B} = 1292646!$ Deze waarde kan bereikt worden, want

$$\frac{29 \div ((\dots((28 \div 27) \div 26) \div \dots \div 17) \div 16)}{15 \div ((\dots((14 \div 13) \div 12) \div \dots \div 3) \div 2)} = 1292646. \blacksquare$$

5. *Dit was een moeilijke en ongewone ongelijkheid, met natuurlijke getallen... Jan Vonk is de enige deelnemer die deze vraag kon oplossen. Zijn oplossing was nogal lang en erg technisch (de onderstaande oplossing is korter en "netter").*

Als $x_i = i$ voor elke i , dan is de waarde van de breuk gelijk aan $\frac{2n+1}{3}$. We bewijzen nu dat

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(2n+1)(a_1 + a_2 + \dots + a_n)}{3}$$

voor alle a_1, a_2, \dots, a_n met $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$: het antwoord is dan inderdaad $\frac{2n+1}{3}$. We bewijzen dat

$$3x_k^2 \geq 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) + (2k+1)x_k$$

voor $k = 1, 2, \dots, n$. Al deze ongelijkheden optellen geeft dan de gewenste ongelijkheid. Nu is

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1} \leq (x_k - (k-1)) + (x_k - (k-2)) + \dots + (x_k - 1) = (k-1)x_k - \frac{k(k-1)}{2}$$

zodat

$$2(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) + (2k+1)x_k \leq (4k-1)x_k - k(k-1).$$

Nu is

$$3x_k^2 - ((4k-1)x_k - k(k-1)) = x_k(3x_k - 4k + 1) + k(k-1)$$

en als x_k varieert over \mathbb{R} , dan is deze uitdrukking minimaal voor $x_k = \frac{2}{3}k$. Omdat $x_k \geq k$ is

$$x_k(3x_k - 4k + 1) + k(k-1) \geq k(3k - 4k + 1) + k(k-1) = 0$$

en daaruit volgt het resultaat, want

$$3x_k^2 \geq (4k-1)x_k - k(k-1) \geq 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}) + (2k+1)x_k. \blacksquare$$