Olympische competitie
Augustus 2006

1. Als we een verzameling punten in de ruimte hebben, mogen we een van de punten uit deze verzameling spiegelen in een ander punt van de verzameling en het beeld hiervan toevoegen aan de verzameling. Veronderstel dat we beginnen met een verzameling die bestaat uit zeven van de acht hoekpunten van een kubus. Is het mogelijk om dan het achtste hoekpunt in de verzameling te krijgen na een eindig aantal stappen?

2. Zij $ABCD$ een convexe koordenvierhoek. Toon aan dat $|AB - CD| \geq |AC - BD|$.

3. Zij $n \geq 2$ een natuurlijk getal. Bewijs dat

$$\left[\log_2 n\right] + \left[\log_3 n\right] + \cdots + \left[\log_n n\right] = \left[\sqrt{n}\right] + \left[\sqrt[3]{n}\right] + \cdots + \left[\sqrt[n]{n}\right],$$

waarbij we met $\left[x\right]$ het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x bedoelen.

4. In de breuk

$$\frac{29 \div 28 \div 27 \div \cdots \div 16}{15 \div 14 \div 13 \div \cdots \div 2}$$

mag men op alle mogelijke plaatsen in de teller haakjes plaatsen, zolang men op precies dezelfde plaatsen ook haakjes zet in de noemer (en zolang de uitdrukking "zinvol" is). Bepaal alle mogelijke gehele waarden van een dergelijke uitdrukking.

5. Zij $a_1, a_2, \cdots, a_n$ een rij van natuurlijke getallen zodanig dat $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Bepaal (in functie van n) de kleinst mogelijke waarde van

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$