Olympische competitie
Juli 2006
Oplossingen

1. *Deze eenvoudige vraag werd door alle deelnemers foutloos opgelost. De essentiële stap was natuurlijk aantonen (met de ongelijkheid tussen de gemiddelden) dat* $0 < x, y, z, t \le \frac{1}{3}$.
   Merk op dat
   $$0 < x = \frac{\sqrt[3]{yzt}}{y+z+t} \le \frac{1}{3}$$
   wegens de ongelijkheid tussen rekenkundig en meetkundig gemiddelde, en op analoge wijze kunnen we aantonen dat $0 < y, z, t \le \frac{1}{3}$. Door de gegeven gelijkheden te vermenigvuldigen en door de resulterende gelijkheid te vereenvoudigen vinden we dan dat
   $$(x+y+z)(y+z+t)(z+t+x)(t+x+y) = 1.$$
   Elke factor in het linkerlid is echter kleiner dan of gelijk aan $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} = 1$. Bijgevolg moet elke factor *gelijk* zijn aan 1, en er moet dus overal gelijkheid optreden: $x = y = z = t = \frac{1}{3}$.

2. *Ook deze vraag was heel eenvoudig en werd door iedereen opgelost. De oplossingswijzen leken ook allemaal een beetje op elkaar: rekenenen modulo 3 leidt al snel tot* $p = 3$ *of* $q = 3$.

   Stel dat p en q niet deelbaar zijn door 3. Als $p \equiv q \pmod 3$ dan is $p^3 - q^5$ deelbaar door 3, want $p^3 - q^5 \equiv p - q \pmod 3$ (kleine stelling van Fermat), maar $(p+q)^2$ is dan niet deelbaar door 3. Als $p \not\equiv q \pmod 3$ dan is het linkerlid niet deelbaar door 3 en het rechterlid wel. Beide gevallen geven een contradictie, dus moet $p = 3$ of $q = 3$. Merk op dat $p > q$. Omdat $(p, q) = (3, 2)$ geen oplossing is, moet $q = 3$. De vergelijking wordt dan $p^3 - 243 = (p+3)^2$ of $p^3 - p^2 - 6p - 252 = (p-7)\left(p^2 + 6p + 36\right) = 0$. Bijgevolg moet $p = 7$, dus is $(p, q) = (7, 3)$.

3. *Dit was een zeer leuke meetkundige ongelijkheid waar je een hele hoop dingen - zowel meetkundig als algebraïsch - moest combineren om tot een deftig antwoord te komen. Tot mijn bijzonder grote verbazing slaagde bijna iedereen daar in, proficiat! Niet alle oplossingen waren elegant, maar correct waren ze wel... De mooiste oplossing was die van Christophe Debry.*
   Zijn a, b en c de lengten van de zijden van $\Delta = \Delta ABC$, met $a^2 + b^2 = c^2$, zij r de straal van de ingeschreven cirkel en zij O het middelpunt. Dan geldt er dat:

   - $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(a+b+c)r$
     Bewijs: de oppervlakten van ΔAOB, ΔBOC en ΔCOB zijn $\frac{1}{2}cr$, $\frac{1}{2}ar$ en $\frac{1}{2}br$.
   - $r = \frac{1}{2}(a+b-c)$
     Bewijs: zijn P, Q en R de punten waar de incirkel aan BC, CA en AB raakt, en zij O het middelpunt van de incirkel. Dan is $OPCQ$ een vierkant en $r = OQ = CP = \frac{1}{2}(a+b-c)$, waarbij de laatste gelijkheid volgt uit $CP = CQ$, $BP = BR$, $AQ = AR$, ...
   - $S' \le \frac{1}{2} \cdot 2r \cdot r = r^2$
     Bewijs: we bekijken de hypotenusa als "basis", de maximale "hoogte" is dan r.

   Het is dus voldoende om te bewijzen dat $\frac{1}{2}(a+b+c)r \ge (3+2\sqrt{2})r^2$. Deze ongelijkheid is equivalent met $a+b+c \ge (3+2\sqrt{2})(a+b-c)$, of nog, $a+b \le c\sqrt{2}$. Nu is
   $$2c^2 - (a+b)^2 = 2\left(a^2+b^2\right) - (a+b)^2 = (a-b)^2 \ge 0$$
   en daaruit volgt het resultaat natuurlijk onmiddellijk. Gelijkheid treedt op als en slechts als $S' = r^2$ en $(a-b)^2 = 0$ (zie boven), of nog, als en slechts als Δ en Δ' allebei gelijkbenig zijn.

4. *Dit was heel leuke getaltheorie: (a) was heel eenvoudig en voor iedereen doenbaar, voor (b) had je wel wat meer inzicht en creativiteit nodig. Ik heb veel verschillende constructies voor maffe getallen gevonden bij deel (b), mooi zo!*

   (a) Als n priem is, dan is $a^n \equiv a \pmod n$ voor alle a. Als $a^n \equiv 1 \pmod n$ dan moet dus gelden dat $a \equiv 1 \pmod n$. Nu is $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1\right)$, en de tweede factor is deelbaar door n: $a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1 \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 + 1 = n = 0 \pmod n$. Omdat ook $a - 1$ deelbaar is door n, is $a^n - 1$ deelbaar door n^2.

(b) Er zijn veel verschillende "constructies" voor maffe getallen mogelijk. Misschien wel de meest algemene uitspraak is de volgende: als n en $\varphi(n)$ onderling ondeelbaar zijn, dan is n een maf getal. Dat kunnen we als volgt bewijzen: als $a^n - 1$ deelbaar is door n, dan zijn a en n in elk geval onderling ondeelbaar. Verder is ook $a^{\varphi(n)} - 1$ deelbaar door n, wegens de stelling van Euler. Bijgevolg is de grootste gemene deler van $a^n - 1$ en $a^{\varphi(n)} - 1$ deelbaar door n. Omdat $\mathrm{ggd}\,(a^s - 1, a^t - 1) = a^{\mathrm{ggd}(s,t)} - 1$ voor alle a, s en t, geldt er dat $a^{\mathrm{ggd}(n,\varphi(n))} - 1 = a - 1$ deelbaar is door n. Het bewijs kan dan vervolledigd worden zoals in deel (a). Het volstaat dus om een oneindige verzameling van natuurlijke getallen n te vinden zodat n en $\varphi(n)$ onderling ondeelbaar zijn en zodat n niet priem is. Neem bijvoorbeeld $n = 3p$, met p een priemgetal zodat $p \equiv 2 \pmod 3$ en $p \neq 2$, dan zijn $3p$ en $2(p-1)$ inderdaad relatief priem, dus dat geeft ons een oneindige oplossingenverzameling. Zo ingewikkeld moest het natuurlijk niet worden. De meeste deelnemers merkten gewoon op dat n maf is als $n = 2p$, met p een oneven priemgetal: dat is heel eenvoudig te controleren. De redenering met $\varphi(n)$ hierboven is echter interessant en leerrijk, vandaar...

5. *Dit was zonder twijfel de "killer" van deze editie: enkel Guolong Li kwam in de buurt van een correcte oplossing, en Arne Loosveldt, Jan Vonk en Christophe Debry hadden heel goede ideeën. De oplossing vereist een heel grote dosis creativiteit én doorzettingsvermogen.*
We bewijzen eerst dat als $p(x)$ voldoet aan de implicatie $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow p(x) \in \mathbb{Q}$, de coëfficiënten van $p(x)$ rationaal moeten zijn. Dat kan op verschillende manieren; de elegantste manier is inductie op de graad van de veelterm. Als $p(x)$ een eerstegraadsveelterm is, dan moeten de coëfficiënten duidelijk rationaal zijn (want $p(0)$ en $p(1)$ zijn rationaal). Stel nu dat de uitspraak geldt voor alle veeltermen van graad hoogstens $n-1$, met $n \geq 2$, en zij $p(x)$ een veelterm van graad n. Dan is $p(0)$ rationaal, dus als x rationaal is moet $q(x) = (p(x) - p(0))/x$ ook rationaal zijn. Nu is $q(x)$ een veelterm van graad $n-1$ zodat $q(x)$ rationaal is als x rationaal is, dus heeft $q(x)$ rationale coﬁciënten. Bijgevolg heeft ook $p(x) = xq(x) + p(0)$ rationale coëfficiënten.
Er bestaan duidelijk geen constante veeltermen die aan de voorwaarden voldoen. Als $p(x)$ een eerstegraadsveelterm is met rationale coëfficiënten, dan voldoet $p(x)$ duidelijk wél aan de voorwaarden. We bewijzen nu dat er *geen* veelterm van graad 2 of meer bestaat die voldoet. Zij $n \geq 2$ de graad van $p(x)$ en schrijf $p(x)$ in de vorm

$$p(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{A}$$

waarbij $a_0, a_1, \cdots, a_n$ en $A > 0$ gehele getallen zijn: dat kan omdat de coëfficiënten rationaal zijn. Zij p een priemgetal dat geen deler is van a_n en A. Veronderstel dat $a > 0$: als $a < 0$ verloopt het bewijs analoog. Omdat $a > 0$ bestaat er een $M > 0$ zodat $p(x)$ alle waarden in het interval $[M, +\infty[$ aanneemt. Kies nu $n \in \mathbb{N}$ zodanig dat $k = n + 1/p > M$. Er moeten dan natuurlijke getallen r en s bestaan zodat $p(r/s) = k$, en dus

$$\frac{a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} s + \cdots + a_1 r s^{n-1} + a_0 s^n}{A s^n} = \frac{mp + 1}{p}$$

Omdat A niet deelbaar is door p, moet p een deler zijn van s^n en dus van s. Aangezien $n \geq 2$ is p^2 een deler van As^n. Omdat $mp + 1$ niet deelbaar is door p moet de teller, een getal van de vorm $a_n r^n + \alpha s$, deelbaar zijn door p. Omdat s deelbaar is door p, en omdat p geen deler is van a_n en r (r en s zijn onderling ondeelbaar) is de teller *niet* deelbaar door p. Dat is een contradictie, en daaruit volgt dat er een *irrationaal* getal x moet bestaan zodanig dat $p(x) = k$. De conclusie is dat enkel de eerstegraadsveeltermen $p(x) = ax + b$ (met $a, b \in \mathbb{Q}$) voldoen.