Olympische competitie
Juli 2006

1. Bepaal alle oplossingen (x, y, z, t), met $x, y, z, t \in \mathbb{R}_0^+$, van het stelsel

$$x = \frac{\sqrt[3]{yzt}}{y+z+t}, \quad y = \frac{\sqrt[3]{xzt}}{x+z+t}, \quad z = \frac{\sqrt[3]{xyt}}{x+y+t}, \quad t = \frac{\sqrt[3]{xyz}}{x+y+z}.$$

2. Bepaal alle koppels (p, q) van priemgetallen p en q zodat $p^3 - q^5 = (p+q)^2$.

3. Zijn Δ en Δ' rechthoekige driehoeken, met oppervlakten S en S', zodat de straal van de ingeschreven cirkel van Δ gelijk is aan de straal van de omgeschreven cirkel van Δ'.
   Bewijs dat $S \geq \left(3 + 2\sqrt{2}\right) \cdot S'$. In welke gevallen wordt deze ongelijkheid een gelijkheid?

4. Een natuurlijk getal n noemen we *maf* als

$$\forall a \in \mathbb{Z} : n \mid a^n - 1 \Rightarrow n^2 \mid a^n - 1 \ .$$

   (a) Laat zien dat elk priemgetal maf is.
   (b) Toon aan dat er oneindig veel maffe getallen bestaan die geen priemgetallen zijn.

5. Bepaal alle reële veeltermen $p(x)$ zodat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat $x \in \mathbb{Q} \iff p(x) \in \mathbb{Q}$.