

Olympische competitie

Juni 2006

1. Bepaal alle koppels (a, b) van natuurlijke getallen a en b zodat de getallen ab en $a^6 - b^6$ beide het product zijn van precies drie (niet noodzakelijk verschillende) priemgetallen.
2. In $\triangle ABC$ raakt de ingeschreven cirkel aan BC , CA en AB in A' , B' en C' respectievelijk. Noem S en T de snijpunten van $A'B'$ en de binnenbissectrices van $\angle A$ en $\angle B$ respectievelijk. Zij M het midden van AB . Toon aan dat $MS = MT$.
3. Zijn $p(x)$ en $q(x)$ veeltermen zodat $p(q(x)) = q(p(x))$ en zodat de vergelijking $p(x) = q(x)$ geen reële oplossingen heeft. Bewijs dat $p(p(x)) = q(q(x))$ ook geen reële oplossingen heeft.
4. Definieer de verzameling \mathcal{S} door

$$\mathcal{S} = \left\{ \frac{m+n}{\sqrt{m^2+n^2}} \mid m, n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$

Stel dat $a, b \in \mathcal{S}$ en dat $a < b$. Bewijs dat er een getal $x \in \mathcal{S}$ bestaat zodat $a < x < b$.

5. Bestaan er twee punten P en Q in de driedimensionale Euclidische ruimte, zodanig dat beide punten rationale coördinaten hebben en zodat $PQ = \sqrt{7}$?