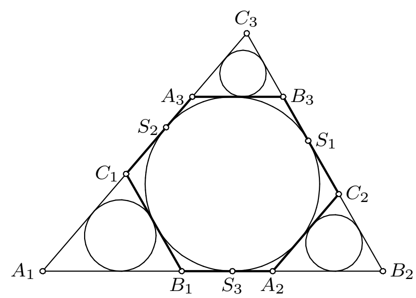
Olympische competitie
Mei 2006
Oplossingen

1. *Bijna alle deelnemers vonden zonder veel moeite een antwoord op deze vraag, maar velen deden dat met heel wat rekenwerk. Spijtig genoeg vond niemand de onderstaande korte oplossing:*
Merk op dat $\alpha = \frac{n+1}{n}$ een oplossing is van de gegeven vergelijking. Immers, we kunnen
$$nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 3x^2 + 2x + 1 - n^2$$
ontbinden als
$$\big(nx - (n+1)\big)\left(x^{n-2} + 2x^{n-3} + \cdots + (n-2)x + (n-1)\right).$$
Natuurlijk is α rationaal en $1 < \alpha < 2$, dus we zijn klaar. ■

2. *Dit was een eenvoudige, bijzonder leuke meetkundevraag, die door de meeste deelnemers correct werd opgelost. Michel Roelens en Arne Loosveldt gaven allebei bijzonder mooie oplossingen.*
We benoemen enkele punten zoals in de figuur:



Zijn r_1, r_2 en r_3 de stralen van de ingeschreven cirkels van $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ en $\Delta A_3B_3C_3$. Merk op dat de driehoekjes $\Delta A_1B_1C_1$, $\Delta A_2B_2C_2$ en $\Delta A_3B_3C_3$ gelijkvormig zijn met $\Delta A_1B_2C_3$. Zijn O_1, O_2 en O_3 de omtrekken van deze driehoekjes en zij O de omtrek van $\Delta A_1B_2C_3$. Omdat
$$\frac{r}{O} = \frac{r_1}{O_1} = \frac{r_2}{O_2} = \frac{r_3}{O_3}$$
hebben we dat $r_1 + r_2 + r_3 = r$ als en slechts als $O_1 + O_2 + O_3 = O$. Merk nu op dat
$$O_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 = A_1B_1 + B_1S_3 + A_1C_1 + C_1S_2 = A_1S_3 + A_1S_2$$
omdat de raaklijnen vanuit een punt aan een cirkel even lang zijn. Zo vinden we dat
$$O_1 + O_2 + O_3 = A_1S_3 + A_1S_2 + B_2S_3 + B_2S_1 + C_3S_2 + C_3S_1 = A_1B_2 + B_2C_3 + C_3A_1 = O$$
en daaruit volgt dat $r_1 + r_2 + r_3 = r$. Dit impliceert dan ook dat
$$B_1A_2 = A_1B_2 - A_1B_1 - A_2B_2 = A_1B_2 - \frac{r_1}{r} \cdot A_1B_2 - \frac{r_2}{r} \cdot A_1B_2 = \frac{r_3}{r} \cdot A_1B_2 = A_3B_3,$$
en bijgevolg zijn de overstaande zijden van de zeshoek even lang. ■

3. *Een grappige vraag: het antwoord is heel eenvoudig, maar je moet er toch maar aan denken... Alle deelnemers die de vraag oplosten (dat zijn er 4) gaven de volgende oplossing:*
Omdat $a_{n+1} \geq a_n^2 + \frac{1}{5}$ voor elke n, hebben we dat
$$a_{n+5} + a_{n+4} + a_{n+3} + a_{n+2} + a_{n+1} \geq a_{n+4}^2 + a_{n+3}^2 + a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 + a_n^2 + 1.$$
Bijgevolg is
$$\begin{aligned} a_{n+5} &\geq a_{n+4}^2 - a_{n+4} + a_{n+3}^2 - a_{n+3} + a_{n+2}^2 - a_{n+2} + a_{n+1}^2 - a_{n+1} + 1 + a_n^2 \\ &= \left(a_{n+4} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a_{n+3} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a_{n+2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(a_{n+1} - \frac{1}{2}\right)^2 + a_n^2 \end{aligned}$$
zodat inderdaad $a_{n+5} \geq a_n^2$. Merk ook op dat er geen gelijkheid kan optreden. ■

4. *De vierde vraag is een schitterend maar bijzonder moeilijk probleem. Twee van de deelnemers vonden een oplossing voor deze vraag: Jan Vonk en Guolong Li. Proficiat! Hun oplossingen waren echter wel iets ingewikkelder dan de onderstaande oplossing:*
   Zij $m \in \mathcal{S}$. Aangezien $\text{ggd}(m, n) = 1$ bestaat er een $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ zodat $km \equiv 1 \pmod{n}$. We noemen k de *inverse* van $m \pmod{n}$. We tonen nu aan dat $k \in \mathcal{S}$. Natuurlijk moet er gelden dat $\text{ggd}(k, n) = 1$. Zij a de inverse van $m + 1 \pmod{n}$, dan vinden we dat

$$(k + 1)ma \equiv (km + m)a \equiv (1 + m)a \equiv 1 \pmod{n}.$$

   Bijgevolg heeft $k+1$ een inverse $\pmod{n}$, en dus is $\text{ggd}(k+1, n) = 1$. Merk op dat m dan ook de inverse is van $k \pmod{n}$. Als $m = k$ dan is $m^2-1 \equiv 0 \pmod{n}$, dus n deelt $(m-1)(m+1)$. Omdat $m \in \mathcal{S}$ is $\text{ggd}(m + 1, n) = 1$, dus n deelt $m - 1$. Bijgevolg is $m = 1$. We kunnen de elementen van $\mathcal{S} \setminus \{1\}$ dus in paren (m, k) onderverdelen waarvoor geldt dat $mk \equiv 1 \pmod{n}$. Daaruit volgt dan dat $\mathcal{P} \equiv 1 \pmod{n}$, dus geldt er dat $\mathcal{P} - 1$ deelbaar is door n. ■

5. *Ook deze vraag was helemaal niet gemakkelijk. Arne Loosveldt en Guolong Li wisten deze harde noot volledig te kraken. Jan Vonk, Michel Roelens en Christophe Debry deden enkele interessante vondsten en verdienden zo toch ook een aantal punten.*