Olympische competitie
Mei 2006

1. Zij $n \geq 2$ een gegeven natuurlijk getal. Toon aan dat de veeltermvergelijking

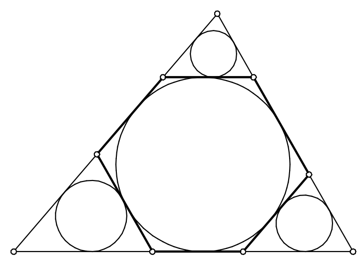
$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = n^2$$

een rationale wortel α heeft die voldoet aan de ongelijkheid $1 < \alpha < 2$.

2. Beschouw een driehoek Δ met ingeschreven cirkel k. Voor elk van de zijden van Δ construeren we een raaklijn aan k die evenwijdig is aan die zijde. Deze drie raaklijnen verdelen Δ in een zeshoek en drie kleine driehoekjes (zie figuur). Zij r de straal van k, en zijn r_1, r_2 en r_3 de stralen van de ingeschreven cirkels van de driehoekjes.

   (a) Toon aan dat $r = r_1 + r_2 + r_3$.

   (b) Toon aan dat de overstaande zijden van de zeshoek even lang zijn.



3. Zij $a_0, a_1, a_2, \cdots$ een rij van reële getallen waarvoor geldt dat $a_{n+1} \geq a_n^2 + \dfrac{1}{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $a_{n+5} \geq a_n^2$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Zij $n \geq 3$ een oneven getal. Zij $\mathcal{S}$ de verzameling van alle natuurlijke getallen $m \leq n$ waarvoor geldt dat m en $m+1$ beiden onderling ondeelbaar zijn met n. Noem $\mathcal{P}$ het product van alle elementen van $\mathcal{S}$. Bewijs dat $\mathcal{P} - 1$ deelbaar is door n.

5. Bepaal alle surjectieve functies $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ zodat voor alle $m, n \in \mathbb{N}_0$ geldt:

$$f(m) \,|\, f(n) \iff m \,|\, n\ .$$

Een functie $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ heeft domein $\mathbb{N}_0$ en heeft een deelverzameling van $\mathbb{N}_0$ als beeld. Zo'n functie is surjectief *als er voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ een $m \in \mathbb{N}_0$ bestaat zodat $f(m) = n$.*