

Olympische competitie

April 2006

Oplossingen

1. *Het leuke aan deze vraag was dat je echt de binomiaalcoëfficiënten moest herkennen om tot op een oplossing te komen. Op wat slordigheden hier en daar na gaf iedereen een juiste oplossing.* We bewijzen per inductie op n dat

$$x_n = \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}, \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Voor $n = 1$ is deze gelijkheid duidelijk correct. Stel nu dat de gelijkheid geldig is voor $n = k$. We bewijzen de gelijkheid dan voor $n = k + 1$. Er geldt dat

$$x_{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+1} x_k = \frac{2(2k+1) \cdot (2k)!}{(k+1) \cdot (k!)^2} = \frac{(2k)! \cdot (2k+1) \cdot (2k+2)}{(k!)^2 \cdot (k+1)^2} = \frac{(2k+2)!}{((k+1)!)^2}$$

en dus hebben we nu bewezen (met inductie) dat $x_n = \binom{2n}{n}$ voor alle natuurlijke getallen n . Het is duidelijk dat alle termen van de rij dan natuurlijke getallen moeten zijn! ■

2. *Experimenteren met kleine n -waarden toont al vlug wat er precies aan de hand is, en om dat dan nog te bewijzen is niet zo moeilijk. Leuke vraag, maar misschien iets te gemakkelijk...* We bewijzen dat $f(n) > f(n+1)$ als en slechts als $n+1$ een volkomen kwadraat is. Stel eerst dat $n+1$ een volkomen kwadraat is. Er bestaat een $k \in \mathbb{N}$ ($k \geq 2$) zodat $n = k^2 - 1$. Er geldt dan dat

$$f(n) = \left\lfloor \frac{k^2 - 1}{\lfloor \sqrt{k^2 - 1} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k^2 - 1}{k - 1} \right\rfloor = k + 1 > k = f(n + 1),$$

waarbij de gelijkheid $\lfloor \sqrt{k^2 - 1} \rfloor = k - 1$ eenvoudig aan te tonen is.

Stel nu dat $f(n) > f(n+1)$ en stel dat $n+1$ geen volkomen kwadraat is. Er bestaat een natuurlijk getal k zodat $k^2 < n+1 < (k+1)^2$. Bijgevolg is $k^2 \leq n < (k+1)^2$, zodat $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k$. Natuurlijk is ook $\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor = k$, zodat

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n+1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor} \right\rfloor = f(n+1).$$

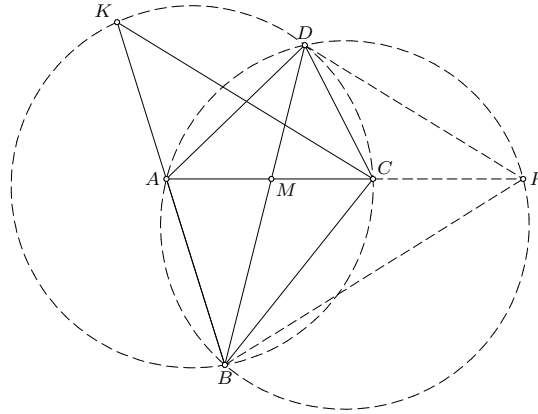
Dat is een duidelijke contradictie. Bijgevolg geldt er dat $n+1$ een volkomen kwadraat is. ■

3. *Een heel mooie meetkundevraag, die op heel veel verschillende manieren opgelost kan worden. Ik had echter niet verwacht dat alle deelnemers een correcte oplossing zouden geven, proficiat!* Kies een punt P op rechte AC zodat $CD = CP$ (waarbij C tussen A en P ligt). Er geldt dan dat $MC + CD = MP$, en uit het gegeven volgt dan dat $MA \cdot MP = MB \cdot MD$. Bijgevolg geldt er dat $ABPD$ een koordenvierhoek is (macht van een punt tot een cirkel), zodat $\angle ABD = \angle APD$. Omdat $\triangle CDP$ gelijkbenig is, geldt er dat

$$\angle KCD = \frac{1}{2} \angle ACD = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle PCD) = \frac{1}{2} (\angle CDP + \angle CDP) = \angle CPD = \angle APD$$

en omdat $\angle APD = \angle ABD = \angle KBD$ verkrijgen we dan de gelijkheid $\angle KBD = \angle KCD$. Daaruit volgt dat $BCDK$ een koordenvierhoek is, en we zijn klaar. ■

Opmerkingen. Je kan ook met gelijkvormige driehoeken werken ($\triangle AMB \sim \triangle DMP$), je hoeft macht van een punt tot een cirkel dus niet gebruiken. Merk ook op dat $CK \parallel DP$.



4. *Deze leuke vraag was misschien wat te simpel: bijna iedereen gaf een perfecte oplossing.* Veronderstel dat er een dergelijke verzameling \mathcal{S} bestaat. Aangezien \mathcal{S} een eindige verzameling is met minstens 2 verschillende elementen, heeft \mathcal{S} een minimum m en een maximum M . Aangezien $2m - M^2 \in \mathcal{S}$ en $2M - M^2 \in \mathcal{S}$ geldt er dat

$$m \leq 2m - M^2 \quad \text{en} \quad 2M - M^2 \leq M.$$

Uit de tweede ongelijkheid volgt dat $M \leq M^2$ en uit de eerste ongelijkheid volgt dat $M^2 \leq m$. Bijgevolg is $M \leq m$, en dat is een contradictie. Zo'n verzameling kan dus niet bestaan. ■

5. *Dis is misschien wel de moeilijkste vraag die tot nu toe in een QED-competitie verschenen is. Proficiat aan Clara en Guolong, die allebei een min of meer correcte oplossing vonden!*

Veronderstel eerst even dat de stelling geldt voor $n = 4$ en beschouw een verzameling van $n \geq 4$ punten in het vlak die aan de voorwaarden uit de opgave voldoet. Voor elk viertal punten in de verzameling is één van de 6 afstanden tussen deze 4 punten een veelvoud van 3. We vinden zo dus $\binom{n}{4}$ afstanden die deelbaar zijn door 3, maar natuurlijk worden deze afstanden meerdere keren geteld. Echter, elk koppel punten behoort tot $\binom{n-2}{2}$ viertallen, dus elke afstand die een veelvoud is van 3 wordt ten hoogste $\binom{n-2}{2}$ keer geteld. Omdat $\binom{n}{4} = \frac{1}{6} \binom{n}{2} \binom{n-2}{2}$ is dan inderdaad minstens $\frac{1}{6}$ van de $\binom{n}{2}$ afstanden een veelvoud van 3.

We moeten de uitspraak dus enkel nog bewijzen voor $n = 4$. Beschouw punten A, B, C, D in het vlak zodat alle 6 afstanden tussen deze punten natuurlijke getallen zijn. We voeren nog wat notatie in: noem $AB = b$, $AC = c$, $AD = d$, $\angle BAC = \alpha$ en $\angle CAD = \beta$. Er geldt dan dat $\angle BAD = \alpha + \beta$. Volgens de cosinusregel gelden de volgende gelijkheden:

$$BC^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \quad CD^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \beta, \quad BD^2 = b^2 + d^2 - 2bd \cos(\alpha + \beta).$$

Schrijf nu $\cos \alpha = x/N$, $\cos \beta = y/N$ en $\cos \gamma = z/N$ met $N = 2bcd$ en $x, y, z \in \mathbb{N}$ en stel dat er van de 6 afstanden geen enkele deelbaar is door 3. Dan is $b^2 \equiv c^2 \equiv d^2 \equiv 1 \pmod{3}$, en uit de bovenstaande gelijkheden volgt dat $dx \equiv by \equiv cz \equiv 1 \pmod{3}$. Bijgevolg zijn x, y en z ook niet deelbaar door 3 en $x^2 \equiv y^2 \equiv z^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Nu is

$$Nz = N^2 \cos(\alpha + \beta) = N^2 \cos \alpha \cos \beta - N^2 \sin \alpha \sin \beta = xy - N^2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Bijgevolg geldt er dat $\Delta := N^2 \sin \alpha \sin \beta \equiv xy - Nz \equiv xy - 2bcdz \equiv xy + bd \pmod{3}$. Daaruit volgt dan dat $\Delta^2 \equiv x^2 y^2 + 2bdxy + b^2 d^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Natuurlijk geldt er ook dat $N^2 \sin^2 \alpha = N^2 (1 - \cos^2 \alpha) = N^2 - z^2 \equiv 0 \pmod{3}$, en dat impliceert dat $\Delta^2 \equiv 0 \pmod{3}$. Dat is een contradictie, en we zijn klaar. ■