Olympische competitie
April 2006

1. Zij $x_1, x_2, \cdots$ een rij van reële getallen zodat $x_1 = 2$ en $nx_n = 2(2n-1)x_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}_0$. Bewijs dat elke term van deze rij een natuurlijk getal is.

2. Definieer $\lfloor x \rfloor$ als het grootste geheel getal kleiner dan of gelijk aan x, voor alle $x \in \mathbb{R}$. Voor alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiëren we

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right\rfloor.$$

   Bepaal alle natuurlijke getallen n waarvoor geldt dat $f(n) > f(n+1)$.

3. Zij $ABCD$ een convexe vierhoek. Zij M het snijpunt van de diagonalen en zij K het snijpunt van AB en de bissectrice van $\angle ACD$. Veronderstel dat

$$\frac{MA}{MB} = \frac{MD}{MC + CD}.$$

   Bewijs dat K op de omgeschreven cirkel van ΔBCD ligt.

4. Bestaat er een eindige verzameling $\mathcal{S}$ van reële getallen, die minstens twee verschillende getallen bevat, zodat voor alle $a, b \in \mathcal{S}$ geldt dat $2a - b^2 \in \mathcal{S}$?

5. Beschouw $n \geq 4$ punten in het vlak zodat de afstand tussen elke twee punten een natuurlijk getal is. Bewijs dat minstens $\frac{1}{6}$ van deze $\binom{n}{2}$ afstanden deelbaar is door 3.