

## Olympische competitie

Maart 2006

### Oplossingen

1. Een grappige ongelijkheid, maar veel meer dan goochelen met sommaties was hier niet aan. Bijna alle deelnemers vonden de oplossing.

Door een beetje te “spelen” met sommatietekens vinden we dat

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij \cos(\alpha_i - \alpha_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij (\cos \alpha_i \cos \alpha_j + \sin \alpha_i \sin \alpha_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i \cos \alpha_i) (j \cos \alpha_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i \sin \alpha_i) (j \sin \alpha_j) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n i \cos \alpha_i \right) \left( \sum_{j=1}^n j \cos \alpha_j \right) + \left( \sum_{i=1}^n i \sin \alpha_i \right) \left( \sum_{j=1}^n j \sin \alpha_j \right) \\ &= \left( \sum_{k=1}^n k \cos \alpha_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n k \sin \alpha_k \right)^2 \\ &\geq 0. \blacksquare\end{aligned}$$

2. Een functie van  $\mathbb{N}$  naar  $\mathbb{N}$  is soms wel iets “speciaals”, maar in dit geval had geen enkele deelnemer moeite met de opgave: iedereen behaalde 7/7.

We bepalen eerst de waarde van  $\varphi(1)$ . Merk op dat  $\varphi(1) \neq 1$ , want als  $\varphi(1) = 1$  dan zou er gelden dat  $3 = \varphi(\varphi(1)) = \varphi(1) = 1$ . Als  $\varphi(1) \geq 3$  dan zou er gelden (omdat  $\varphi$  een strikt stijgende functie is) dat  $\varphi(1) \geq 3 = \varphi(\varphi(1)) \geq \varphi(3)$ , en dat is eveneens een contradictie. Bijgevolg moet er gelden dat  $\varphi(1) = 2$ .

We bewijzen nu dat  $\varphi(3^a) = 2 \cdot 3^a$  voor alle  $a \in \mathbb{N}$ . Deze gelijkheid is duidelijk correct voor  $a = 0$ , en als ze klopt voor een zekere  $a$ , dan geldt de gelijkheid ook voor  $a + 1$ , aangezien

$$\varphi(3^{a+1}) = \varphi(\varphi(3^a)) = \varphi(2 \cdot 3^a) = 3 \cdot 2 \cdot 3^a = 2 \cdot 3^{a+1}.$$

Daaruit volgt dus dat  $\varphi(729) = 1458$  en  $\varphi(1458) = \varphi(\varphi(729)) = 2187$ . Omdat  $\varphi$  strikt stijgend is valt hieruit af te leiden dat voor alle  $n \in \{729, 730, \dots, 1458\}$  geldt dat  $\varphi(n) = n + 729$ . Bijgevolg geldt er dat  $\varphi(1277) = 2006$  zodat  $\varphi(2006) = \varphi(\varphi(1277)) = 3 \cdot 1277 = 3831$ .

3. Deze mooie getaltheorievraag vereiste wel wat creativiteit. De meeste deelnemers gaven dezelfde “constructie” voor dubbeltjes die kwadraten zijn. Veel deelnemers waren echter onnauwkeurig in hun antwoord, enkel Arne Loosveldt en Christophe Debry gaven een volledige oplossing.

Merk op dat alle dubbeltjes van de vorm  $a(10^n + 1)$  zijn, met  $a$  een natuurlijk getal dat uit precies  $n$  cijfers bestaat. We kunnen gemakkelijk nagaan dat  $11^2$  een deler is van  $10^{11} + 1$ . Bijgevolg is  $11^2$  een deler van  $10^{11(2k+1)} + 1 = (10^{11} + 1)(\dots)$  voor alle natuurlijke getallen  $k$ . Daaruit volgt dat het getal

$$a = \frac{100}{121} \left( 10^{11(2k+1)} + 1 \right)$$

een natuurlijk getal is voor alle natuurlijke getallen  $k$ , en het is niet moeilijk om in te zien dat  $a$  uit precies  $11(2k + 1)$  cijfers bestaat. Kies nu  $n = 11(2k + 1)$  en  $a$  zoals hierboven, dan is

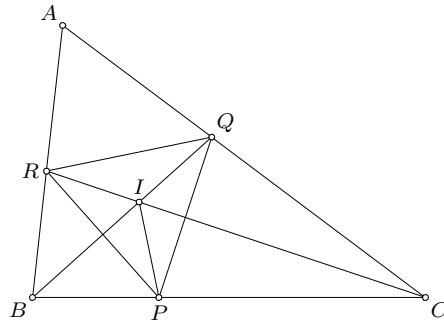
$$a(10^n + 1) = \left( \frac{10}{11} \left( 10^{11(2k+1)} + 1 \right) \right)^2$$

duidelijk een dubbeltje én een volkomen kwadraat. Voor elke natuurlijke waarde van  $k$  vinden we zo dus een dubbeltje, en bijgevolg zijn oneindig veel dubbeltjes volkomen kwadraten.  $\blacksquare$

4. De vierde vraag was een moeilijke meetkundevraag die door verrassend veel deelnemers werd opgelost. Sommige deelnemers konden slechts één van de twee implicaties bewijzen, en kregen daar 3/7 of 4/7 voor. Clara Mertens verdient een pluim omdat zij de enige is die 7/7 scoorde. Veronderstel eerst dat  $P$  op  $BC$  ligt zodat  $\triangle PQR$  gelijkzijdig is. Dan gaat  $BQ$ , de bissectrice van  $\angle PBR$ , door het hoekpunt  $Q$  van de gelijkzijdige driehoek  $\triangle PQR$ . Er geldt dat

$$\frac{RQ}{\sin \angle RBQ} = \frac{BQ}{\sin \angle BRQ}, \quad \frac{PQ}{\sin \angle PBQ} = \frac{BQ}{\sin \angle BPQ}$$

en aangezien  $RQ = PQ$  en  $\angle RBQ = \angle PBQ$  geldt er dat  $\sin \angle BRQ = \sin \angle BPQ$ . Bijgevolg moet er gelden dat  $\angle BRQ = \angle BPQ$  of  $\angle BRQ + \angle BPQ = 180^\circ$ . In het tweede geval zou de vierhoek  $BPQR$  echter een koordenvierhoek zijn en  $\angle PBR = 120^\circ$ , contradictie:  $\triangle ABC$  is scherphoekig. Bijgevolg geldt er dat  $\angle BRQ = \angle BPQ$ , dus  $\triangle BQP \cong \triangle BQR$ . Daaruit volgt dat  $\angle PQB = \angle RQB = 30^\circ$ . Op analoge wijze tonen we aan dat  $\angle PRC = \angle QRC = 30^\circ$ . Zij nu  $I$  het middelpunt van de ingeschreven cirkel van de driehoek, dan is  $\angle RIQ = \angle BIC = 120^\circ$ . Het is niet moeilijk om in te zien dat  $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ , dus geldt er inderdaad dat  $\angle A = 60^\circ$ .



Stel nu dat  $\angle A = 60^\circ$  en zij  $P$  het snijpunt van  $BC$  en de bissectrice van  $\angle BIC$ . Merk op dat  $\angle BIC = 120^\circ$ . Er geldt dat  $\triangle IPB \cong \triangle IRB$ , want  $\angle IBP = \angle IBR$  en  $\angle BIP = \angle BIR = 60^\circ$ . Daaruit volgt dat  $IP = IR$ . Op analoge wijze tonen we aan dat  $IP = IQ$ , dus  $IP = IQ = IR$ . Omdat ook  $\angle PIQ = \angle QIR = \angle RIP = 120^\circ$  geldt er dat  $\triangle PIQ \cong \triangle QIR \cong \triangle RIP$ . Daaruit volgt tenslotte dat  $PQ = QR = RP$ , en we zijn klaar. ■

5. De laatste vraag was een heel mooie en uitdagende vraag die een stevige mix van combinatoriek en algebra bevat. Vier van de deelnemers gaven een min of meer correcte oplossing: proficiat! Zij  $C$  de karakteristiek van de tabel. We bewijzen eerst dat  $C \leq \frac{n+1}{n}$ . Stel

$$A = \{n^2 - n + 1, \dots, n^2 - 1, n^2\}.$$

De verzameling  $A$  bevat precies  $n$  getallen. Als twee van deze getallen in dezelfde rij of kolom voorkomen, men zegge  $a$  en  $b$  (met  $a < b$ ), dan geldt er dat

$$C \leq \frac{a}{b} \leq \frac{n^2}{n^2 - n + 1} < \frac{n+1}{n}.$$

Veronderstel dus dat elke rij of kolom juist één getal uit  $A$  bevat. Het getal  $n^2 - n$  staat dan in dezelfde kolom als precies één getal  $c \in A$  en in dezelfde rij als precies één getal  $d \in A$ . Veronderstel, zonder verlies van de algemeenheid, dat  $c > d$ , dan is  $d \leq n^2 - 1$  zodat

$$C \leq \frac{n^2 - 1}{n^2 - n} = \frac{(n-1)(n+1)}{n(n-1)} = \frac{n+1}{n}.$$

Bijgevolg geldt er inderdaad dat  $C \leq \frac{n+1}{n}$ . We moeten nu nog een tabel/matrix construeren waarvan de karakteristiek  $C$  echt gelijk is aan  $\frac{n+1}{n}$ . Dit doen we als volgt: in rij  $i$  en kolom  $j$  zetten we het getal  $i + n(j - i - 1)$  voor  $i < j$  en het getal  $i + n(n - i + j - 1)$  voor  $i \geq j$ .

De tabel ziet er dan als volgt uit:

|              |              |              |         |                  |              |
|--------------|--------------|--------------|---------|------------------|--------------|
| $1 + (n-1)n$ | 1            | $1 + n$      | $\dots$ | $1 + (n-3)n$     | $1 + (n-2)n$ |
| $2 + (n-2)n$ | $2 + (n-1)n$ | 2            | $\dots$ | $2 + (n-4)n$     | $2 + (n-3)n$ |
| $3 + (n-3)n$ | $3 + (n-2)n$ | $3 + (n-1)n$ | $\dots$ | $3 + (n-5)n$     | $3 + (n-4)n$ |
| $\dots$      | $\dots$      | $\dots$      | $\dots$ | $\dots$          | $\dots$      |
| $(n-2) + 2n$ | $(n-2) + 3n$ | $(n-2) + 4n$ | $\dots$ | $n-2$            | $(n-2) + n$  |
| $(n-1) + n$  | $(n-1) + 2n$ | $(n-1) + 3n$ | $\dots$ | $(n-1) + (n-1)n$ | $n-1$        |
| $n$          | $n + n$      | $n + 2n$     | $\dots$ | $n + (n-2)n$     | $n + (n-1)n$ |

We moeten nu nog aantonen dat voor deze tabel geldt dat  $C = \frac{n+1}{n}$ . Zij  $a_{ij}$  het getal in rij  $i$  en kolom  $j$ . Het verschil van twee getallen in dezelfde rij is een veelvoud van  $n$ , dus als  $a_{ij}$  en  $a_{ik}$  getallen in dezelfde rij zijn met  $a_{ij} > a_{ik}$  geldt er dat  $a_{ij} \geq a_{ik} + n$  zodat

$$\frac{a_{ij}}{a_{ik}} \geq \frac{a_{ik} + n}{a_{ik}} \geq \frac{n^2}{n^2 - n} = \frac{n}{n-1} > \frac{n+1}{n}.$$

De getallen in de eerste kolom vormen een dalende rekenkundige rij

$$(n-1)n + 1 \geq (n-2)n + 2 \geq \dots \geq 2n + (n-2) \geq n + (n-1) \geq n$$

dus voor alle  $i$  en  $k$  geldt

$$\frac{a_{i1}}{a_{k1}} \geq \frac{n^2 - n + 1}{n^2 - 2n + 2} \geq \frac{n+1}{n}$$

(met gelijkheid als  $n = 2$ ). De getallen in de laatste kolom zijn  $n^2$  en de rekenkundige rij  $n-1$ ,  $2(n-1)$ ,  $3(n-1)$ ,  $\dots$ ,  $(n-1)^2$ . De “kleinste verhouding” van deze getallen is

$$\frac{(n-1)^2}{(n-2)(n-1)} = \frac{n-1}{n-2} > \frac{n+1}{n}.$$

Beschouw nu de getallen in kolom  $j$ , met  $2 \leq j \leq n-1$ . Deze kolom bevat de getallen

$$j-1, j-2+n, j-3+2n, \dots, 1+(j-2)n, n+j(n-1), \dots, j+(n-1)n.$$

Voor alle  $i$  en  $k$  geldt nu duidelijk

$$\frac{a_{ij}}{a_{kj}} \geq \frac{j+(n-1)n}{j+1+(n-2)n} \geq \frac{n+1}{n},$$

met gelijkheid voor  $j = n-1$ . Daarmee zijn we klaar. ■