

**Olympische competitie**  
Maart 2006

1. Zij  $n$  een natuurlijk getal, en zijn  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  reële getallen. Bewijs dat

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij \cos(\alpha_i - \alpha_j) \geq 0.$$

2. Zij  $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$  een strikt stijgende functie zodat  $\varphi(\varphi(n)) = 3n$  voor alle  $n \in \mathbb{N}_0$ . Bepaal alle mogelijke waarden van  $\varphi(2006)$ .
3. Een *dubbeltje* is een natuurlijk getal dat men bekomt door de cijfers van een bepaald natuurlijk getal twee keer achter elkaar op te schrijven. De getallen 157157 en 340340 zijn voorbeelden van dubbeltjes, maar het getal 37037 is geen dubbeltje. Toon aan dat er oneindig veel dubbeltjes bestaan die volkomen kwadraten zijn.
4. Zij  $\triangle ABC$  een scherphoekige driehoek, en zijn  $Q$  en  $R$  de snijpunten van de bissectrices van  $\angle B$  en  $\angle C$  met de zijden  $AC$  en  $AB$  respectievelijk. Bewijs dat  $\angle A = 60^\circ$  als en slechts als er een punt  $P$  op de zijde  $BC$  bestaat zodat  $\triangle PQR$  gelijkzijdig is.
5. Zij  $n \geq 2$  een natuurlijk getal. De natuurlijke getallen van 1 tot  $n^2$  worden in een tabel met  $n$  rijen en  $n$  kolommen geplaatst. Voor elke twee getallen in dezelfde rij of kolom wordt de verhouding van het grootste getal tot het kleinste getal berekend, en de *karakteristiek* van de tabel wordt gedefinieerd als het minimum van deze  $n^2(n-1)$  verhoudingen. Bepaal de grootst mogelijke waarde van de karakteristiek van de tabel.