

Olympische competitie

Februari 2006

Oplossingen

1. *De eerste vraag was een hele mooie en eenvoudige denkvraag. De vraag bleek echter niet triviaal te zijn en niet alle deelnemers slaagden er in om hun antwoord perfect op te schrijven.*

Kies een natuurlijk getal n willekeurig. We bewijzen dat n het verschil is van twee termen van deze rij. Beschouw de verzameling $V = \{x_1, x_2, \dots, x_{n+1}\}$. Dit is een verzameling van $n + 1$ natuurlijke getallen, verschillend van 0 en kleiner dan of gelijk aan $2n$. Bekijk nu de n koppels $(1, n+1), (2, n+2), \dots, (n, 2n)$. Volgens het duivenhokprincipe bevat V twee getallen die uit één van deze n koppels komen, en deze twee getallen hebben inderdaad n als verschil. ■

2. *Ook deze vraag was niet heel moeilijk maar ook niet triviaal. Opnieuw heb ik mijn bedenkingen bij de manier waarop sommige deelnemers hun antwoord opschreven: Jan Vonk deed dat iets beter dan de rest. Merk op dat ook een oplossing via inductie op n mogelijk is.*

Zij $n \in \mathbb{N}$ en stel dat $n = 2^\alpha p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, met $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ oneven priemgetallen. Het is duidelijk dat $\psi(n) = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$, zodat $\psi(n)/n = 1/2^\alpha$. De som wordt dus

$$\frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} \frac{1}{2^{\alpha_i}},$$

waarbij α_i voor alle i het grootste natuurlijk getal is zodat 2^{α_i} een deler is van i . Het is duidelijk dat de verzameling $\{1, 2, \dots, 2^n\}$ voor elke waarde van $k \leq n - 1$ precies 2^{n-k-1} getallen i bevat zodat $\alpha_i = k$. Er bestaat één getal i in deze verzameling (namelijk 2^n) waarvoor geldt dat $\alpha_i = n$. Bijgevolg is de gegeven som gelijk aan

$$\frac{1}{4^n} + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-k-1}}{2^k} = \frac{1}{4^n} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{4^n} + \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) > \frac{2}{3}. \blacksquare$$

3. *Het is niet zo moeilijk om de juiste ideeën te krijgen om deze vraag op te lossen, maar het is wel moeilijk om deze ideeën goed te formuleren en correct neer te schrijven. Alle deelnemers vergaten hier en daar wel iets te bewijzen of een stap te verantwoorden.*

Stel $a_1 = c$. Het is niet moeilijk om te bewijzen (per inductie op n) dat

$$a_n = (-1)^n (F_{n-1} - cF_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

waarbij F_n het n -de Fibonaccigetal is (met $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ voor alle $n \in \mathbb{N}_0$). Omdat $a_n \geq 0$ voor alle n geldt er dat

$$c \leq \frac{F_{n-1}}{F_n} \text{ voor } n \text{ even en } c \geq \frac{F_{n-1}}{F_n} \text{ voor } n \text{ oneven.}$$

Bijgevolg is

$$\frac{F_{2k-1}}{F_{2k}} \leq c \leq \frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Een bekende eigenschap van Fibonaccigetallen is dat de verhouding van twee opeenvolgende termen van de rij van Fibonacci naar de gulden snede convergeert, of nog,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

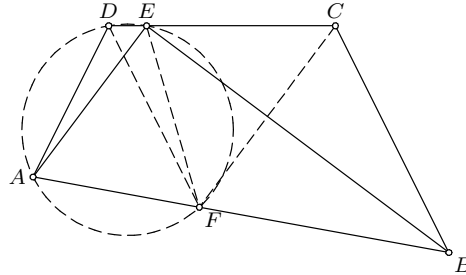
Wegens de insluitstelling voor limieten geldt er dan dat

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = \frac{1}{\phi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Dit is dus de enige mogelijke waarde van $c = a_1$, en het is duidelijk dat die voldoet aan alle voorwaarden. Het is namelijk niet moeilijk om te bewijzen, met inductie, dat $F_{2k} \geq \phi F_{2k-1}$ en $F_{2k+1} \leq \phi F_{2k}$ voor alle $k \in \mathbb{N}_0$. Bijgevolg bestaat er een unieke dergelijke rij. ■

4. De vierde vraag was een heel mooie en gepeperde meetkundevraag waar heel wat deelnemers moeite mee hadden. Clara Mertens, Jan Vonk en Guolong Li gaven mooie oplossingen. Veronderstel eerst dat $\angle AEB = 90^\circ$. Zij F het spiegelbeeld van C ten opzichte van BE . Het is duidelijk dat F op AB ligt, want BE is de bissectrice van $\angle ABC$. Er geldt dat $BC = BF$ en $\angle BFE = \angle BCE = \angle EDA$. Daaruit volgt dat de punten A, D, E en F op een cirkel liggen. Omdat $\angle AEB = 90^\circ$ en $\angle CEB = \angle BEF$ geldt er dat $\angle FEA = \angle AED$, waaruit volgt dat $\angle FDA = \angle FEA = \angle AED = \angle ADF$ en dus $AF = AD$. Bijgevolg geldt er dat

$$AB = AF + FB = AD + BC.$$



Veronderstel nu dat $AB = AD + BC$. Er bestaat dan een punt F op AB zodat $BF = BC$ and $AF = AD$. De driehoeken $\triangle BCE$ en $\triangle BFE$ zijn dan congruent, de punten A, D, E en F liggen op een cirkel en $\angle FDA = \angle AFD$. Bijgevolg is $\angle FEA = \angle FDA = \angle AFD = \angle AED$, zodat AE de bissectrice is van $\angle DEF$. Daaruit volgt tenslotte dat $\angle AEB = 90^\circ$. ■

5. De laatste vraag vormde voor alle deelnemers een echte uitdaging. Enkel Guolong Li gaf een complete oplossing. Jan Vonk gaf een correcte oplossing voor het eerste deel van de vraag. Clara Mertens gaf een oplossing voor beide delen die grotendeels correct was.

Om het eerste deel van de vraag op te lossen kleuren we de eerste, derde en vijfde rij van de gegeven $5 \times n$ -rechthoek rood. De tweede en vierde rij kleuren we blauw. Er bevinden zich dan $3n$ rode vierkantjes en $2n$ blauwe vierkantjes in de rechthoek. Merk op dat elke tegel *ten hoogste* 3 rode vierkantjes kan bedekken. Omdat er n tegels zijn, moet elke tegel *precies* 3 rode vierkantjes bedekken. Het is duidelijk dat de 2 blauwe vierkantjes die door een bepaalde tegel bedekt worden zich steeds op dezelfde rij bevinden. Daaruit volgt een “blauwe rij” een even aantal vierkantjes moet bevatten, en dat betekent dat n even is.

Zij nu a_k het aantal manieren om een $5 \times 2k$ -rechthoek te bedekken met dergelijke tegels, en zij p_k het aantal manieren om deze rechthoek te bedekken zonder dat er een *kleinere* $5 \times 2i$ -rechthoek gevormd/“bedekt” wordt. Met behulp van een paar eenvoudige tekeningen wordt het duidelijk dat $p_1 \geq 2$, $p_2 \geq 2$, $p_3 \geq 4$. Op analoge wijze vinden we dan dat $p_n \geq 2$, $\forall n$. (Het is handig om de gevallen $n = 3k$, $n = 3k + 1$ en $n = 3k + 2$ apart te beschouwen: zie “extra afbeelding”.) Door nu voor $i = 1, 2, \dots, k - 1$ telkens de linker- $5 \times 2i$ -deelrechthoek van de gegeven $5 \times 2k$ -rechthoek te beschouwen kunnen we inzien dat

$$a_k = p_1 a_{k-1} + p_2 a_{k-2} + \dots + p_{k-1} a_1 + p_k \geq 2(a_{k-1} + a_{k-2} + \dots + a_1 + 1).$$

Het is nu heel eenvoudig om de ongelijkheid $a_k \geq 2 \cdot 3^{k-1}$ per inductie te bewijzen. Immers, als $a_j \geq 2 \cdot 3^{j-1}$ voor $j \leq k - 1$ dan geldt er dat

$$a_k \geq 2 \sum_{j=1}^{k-1} a_j + 2 \geq 2 \sum_{j=1}^{k-1} 2 \cdot 3^{j-1} + 2 = 4 \cdot \frac{3^{k-1} - 1}{3 - 1} + 2 = 2 \cdot 3^{k-1}. \quad \blacksquare$$