

## Olympische competitie

Februari 2006

1. Zij  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  een rij van natuurlijke getallen waarvoor geldt dat  $x_1 = 1$  en

$$x_n < x_{n+1} \leq 2n \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Bewijs dat elk natuurlijk getal het verschil is van twee termen van deze rij.

2. Voor elk natuurlijk getal  $n$  definiëren we  $\psi(n)$  als de grootste oneven deler van  $n$ . Bewijs:

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{\psi(k)}{k} > \frac{2}{3} \text{ voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

3. Laat zien dat er een unieke rij  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  van reële getallen bestaat waarvoor geldt dat

$$a_0 = 1, \quad a_n \geq 0 \quad \text{en} \quad a_{n+2} = a_n - a_{n+1} \quad \text{voor alle } n \in \mathbb{N}.$$

4. Veronderstel dat  $ABCD$  een convexe vierhoek is waarvoor geldt dat  $\angle BCD = \angle CDA$ . Zij  $E$  het snijpunt van de bissectrice van  $\angle ABC$  met  $CD$ . Bewijs dat

$$\angle AEB = 90^\circ \iff AB = AD + BC.$$

5. De volgende “tegels” zijn opgebouwd uit eenheidsvierkanten:



- (a) Zij  $n$  een natuurlijk getal zodat een rechthoek met afmetingen  $5 \times n$  bedekt kan worden met  $n$  dergelijke tegels, zonder overlappingen. Bewijs dat  $n$  even is.
- (b) Zij  $k \geq 1$  een natuurlijk getal. Toon aan dat er minstens  $2 \cdot 3^{k-1}$  manieren zijn om een rechthoek met afmetingen  $5 \times 2k$  te bedekken met  $2k$  dergelijke tegels. (Merk op dat twee “symmetrische constructies” als verschillend worden beschouwd.)