

Olympische competitie

Januari 2006

Oplossingen

1. *Dit was een heel eenvoudige meetkundevraag die door bijna alle deelnemers met elementaire middelen (en vermoedelijk zonder al te veel moeite) werd opgelost.*

Het is niet moeilijk om na te gaan, met congruentiekenmerken voor driehoeken en wat rekenwerk met hoeken, dat de uitspraken “ $\triangle ABE$ is gelijkzijdig” en “ $\triangle CDE$ is gelijkzijdig” beiden equivalent zijn met $\triangle ADE \cong \triangle BCE$, en daaruit volgt het resultaat onmiddellijk. ■

2. *Dit was misschien wel de moeilijkste vraag. Clara Mertens, Jan Vonk en Christophe Debry hadden goede ideeën, maar de enige perfecte (heel elegante) oplossing kwam van Guolong Li.*

Het is duidelijk dat $a \geq 0$, want anders zou $2^n a + b$ negatief zijn voor een voldoende grote waarde van n . Als $b = 0$, dan moet ook $a = 0$. Veronderstel dus dat $a > 0$ en $b \neq 0$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ moet er een natuurlijk getal k_n bestaan waarvoor geldt dat $2^n a + b = k_n^2$. Dan is de rij k_0, k_1, k_2, \dots zeker strikt stijgend. Verder geldt er ook dat $4k_n^2 - k_{n+2}^2 = 3b$ voor alle $n \in \mathbb{N}$, of nog, $(2k_n - k_{n+2})(2k_n + k_{n+2}) = 3b$. Er moet dan gelden dat $|2k_n + k_{n+2}| \leq 3|b|$ voor alle $n \in \mathbb{N}$. Dit is natuurlijk een contradictie omdat de rij k_0, k_1, k_2, \dots strikt stijgend is. Bijgevolg moet $a = 0$, en we zijn klaar. ■

3. *Een aantal mensen hadden moeite met deze ongelijkheid. Er waren echter geen niet-elementaire technieken nodig om tot een correct bewijs te komen. De volgende korte en elegante oplossing werd gegeven door Clara Mertens, Christophe Debry en Jan Vonk:*

Omdat

$$ab + bc + ca = \frac{1}{2}((a+b+c)^2 - a^2 - b^2 - c^2) = \frac{1}{2}(9 - a^2 - b^2 - c^2)$$

volstaat het om te bewijzen dat

$$a^2 + 2\sqrt{a} + b^2 + 2\sqrt{b} + c^2 + 2\sqrt{c} \geq 3(a+b+c) = 9.$$

Echter, uit de ongelijkheid tussen rekenkundig en meetkundig gemiddelde volgt dat

$$a^2 + 2\sqrt{a} = a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}\sqrt{a}} = 3a$$

en daaruit volgt het resultaat onmiddellijk. ■

4. *Dit was een relatief eenvoudige vraag die met wat meetkundig inzicht vrij eenvoudig opgelost kon worden. De heel wat moeilijkere bonusvraag werd op een heel elegante manier opgelost door Guolong Li. Voor de bonusvraag wordt later nog een oplossing gepubliceerd.*

Zij I het midden van PQ en zij R het raakpunt van de gegeven cirkels. Uit symmetrie-beschouwingen volgt dat A , I en R collineair zijn en dat AI de bissectrice is van $\angle A$. We moeten nu nog bewijzen dat BI de bissectrice is van $\angle B$. Merk op dat $AI \perp PQ$. Omdat ook $PB \perp BR$ (aangezien AR een diameter van de omgeschreven cirkel is) is $PBRI$ een koordenvierhoek, zodat $\angle PBI = \angle PRI = \frac{1}{2}\angle PRQ = \frac{1}{2}\angle APQ = \frac{1}{2}\angle ABC$. (Hierbij volgt de gelijkheid $\angle PRQ = \angle APQ$ uit het feit dat AP raakt aan γ . De laatste gelijkheid geldt omdat $PQ \parallel BC$.) Omdat $\angle ABI = \frac{1}{2}\angle ABC$ is BI de bissectrice van $\angle B$, en we zijn klaar. ■

5. *Deze verrassende vraag is niet zo moeilijk als hij er op het eerste zicht uitziet. Bijna alle deelnemers losten deze vraag correct op, en de meesten deden dat op een elegante manier.*

Merk op dat het beeld zeker 4 elementen moet bevatten. Immers, $\varphi(1)$, $\varphi(3)$, $\varphi(6)$ en $\varphi(8)$ moeten allemaal verschillend zijn omdat de getallen $3-1$, $6-1$, $8-1$, $6-3$, $8-3$ en $8-6$ allen priem zijn. Nu bestaat er een functie φ' die aan de voorwaarden voldoet en precies 4 elementen in zijn beeld heeft, namelijk de functie die elk natuurlijk getal n afbeeldt op de rest bij deling van n door 4, vermeerderd met 1. Immers, als voor die functie φ' en voor zekere natuurlijke getallen m en n geldt dat $\varphi'(m) = \varphi'(n)$ dan is $m-n$ een veelvoud van 4 en dus zeker geen priemgetal. Bijgevolg is het antwoord inderdaad 4. ■