Olympische competitie
December 2006

1. Zij a een natuurlijk getal zodanig dat voor alle natuurlijke getallen n geldt dat a^n uit een oneven aantal cijfers bestaat. Bewijs dat er een natuurlijk getal k bestaat zodat $a = 100^k$.

2. Zij $ABCD$ een vierkant en zij E een punt op de zijde CD. De ingeschreven cirkel van $\triangle ADE$ raakt DE in F. Beschouw een cirkel binnen $ABCE$ die raakt aan AB, BC en EA, en zij G het punt waar deze cirkel aan AB raakt. Bewijs dat AE, BD en FG door één punt gaan.

3. De hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek hebben coördinaten (a_x, a_y), (b_x, b_y) en (c_x, c_y). Bewijs dat minstens één van de getallen a_x, a_y, b_x, b_y, c_x en c_y niet geheel is.

4. Bepaal alle natuurlijke getallen $n \geq 2$ waarvoor geldt dat

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n \leq \frac{n-1}{n}\left(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2\right)$$

voor alle positieve reële getallen $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

5. Een *bitstring* van lengte n is een rij van de vorm $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, met alle $a_i \in \{0, 1\}$. Als $A = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ en $B = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ bitstrings van lengte n zijn, dan definiëren we de *afstand* tussen A en B als het aantal indices $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ waarvoor geldt dat $a_i \neq b_i$. We noteren deze afstand met $d(A, B)$.

Veronderstel nu dat A, B en C bitstrings van lengte n zijn zodanig dat

$$d(A, B) = d(B, C) = d(C, A) = d.$$

(a) Toon aan dat d even is.

(b) Bewijs dat er een bitstring D van lengte n bestaat zodanig dat

$$d(A, D) = d(B, D) = d(C, D) = \frac{d}{2}.$$