Olympische competitie
November 2006
Oplossingen

1. *Vraag 1 was een leuke en interessante vraag. Wie de oplossing ziet kan misschien de indruk krijgen dat er enkel veel goniometrische formules moesten worden gemanipuleerd om tot een oplossing te komen, maar originele ideëen en scherp redeneerwerk zijn wel degelijk nodig om een goede oplossing te vinden. Guolong Li en Arne Loosveldt deden dat beiden prima.*
(*Oplossing van Arne Loosveldt.*) In elke driehoek waarvan de zijden rationale lengten hebben geldt dat de cosinus van elk van de hoeken rationaal is. (Dit is een gevolg van de cosinusregel.) Bijgevolg zijn de uitdrukkingen rationaal:

(1) $\sin \angle BAC \sin \angle DAC = \cos \angle BAC \cos \angle DAC - \cos \angle A$,

(2) $\sin \angle BAC \sin \angle BCA = \cos \angle BAC \cos \angle BCA + \cos \angle B$,

(3) $\dfrac{\sin \angle BCA}{\sin \angle DAC}$ (omwille van (1) en (2)),

(4) $\dfrac{\sin \angle BCA}{\sin \angle ACD} = \dfrac{CD}{AD} \dfrac{\sin \angle BCA}{\sin \angle DAC}$ (volgens de sinusregel),

(5) $\dfrac{\sin \angle C}{\sin \angle ACD} = \cos \angle BCA + \cos \angle ACD \cdot \dfrac{\sin \angle BCA}{\sin \angle ACD}$,

(6) $\dfrac{\sin \angle BDC}{\sin \angle ACD} = \dfrac{BC}{BD} \dfrac{\sin \angle C}{\sin \angle ACD}$,

(7) $\dfrac{CD}{SD} = \dfrac{\sin \angle DSC}{\sin \angle ACD} = \cos BDC + \cos ACD \cdot \dfrac{\sin \angle BDC}{\sin \angle ACD}$.

Daaruit volgt dat DS rationaal is. Het bewijs verloopt analoog voor AS, BS en CS. $\square$

2. *Deze vraag is een ongelofelijk pareltje! In principe wordt hier een variant van het* duivenhokprincipe *toegepast. Om de onderstaande korte (enige?) oplossing te vinden is heel wat creativiteit nodig, en enkel Guolong Li kon de opgave oplossen. Proficiat!*
Construeer op elk van de zijden van de veelhoek $\mathcal{P}$ (binnenwaarts) een rechthoek met hoogte $\mathcal{S}/\mathcal{O}$. De totale oppervlakte van al de geconstrueerde rechthoeken samen is dan natuurlijk gelijk aan $\mathcal{S}/\mathcal{O} \cdot \mathcal{O} = \mathcal{S}$. Omdat de veelhoek convex is, zullen elke twee "opeenvolgende" rechthoeken elkaar een beetje overlappen. De totale oppervlakte van de rechthoeken samen is gelijk aan de oppervlakte van $\mathcal{P}$, en de rechthoeken overlappen elkaar. Bijgevolg bestaat er een punt A binnen $\mathcal{P}$ dat door geen enkele geconstrueerde rechthoek bedekt wordt. De afstand van A tot een willekeurige zijde van $\mathcal{P}$ is dus groter dan $\mathcal{S}/\mathcal{O}$. We construeren dus een cirkel met middelpunt A en straal $\mathcal{S}/\mathcal{O}$, en we zijn klaar. $\square$

3. *Vraag 3 was misschien enigszins verraderlijk. Er bestaan weliswaar veel veeltermen $p(x)$ die niet aan de opgave voldoen, maar het is niet zo makkelijk om voor eender welke van die veeltermen in te zien dat er oneindig veel natuurlijke getallen n bestaan zodanig dat $p(n)$ een volkomen kwadraat is. Hier moet wel bij vermeld worden dat de opgave een stuk eenvoudiger was voor deelnemers die iets van Pell-vergelijkingen kennen: Guolong Li loste de opgave op die manier op. Alle deelnemers gaven een correct antwoord.*

De uitspraak is vals. Neem $f(x) = 2x^2 + 1$, dan is f duidelijk niet te schrijven als het kwadraat van een veelterm met gehele coëfficiënten. We construeren nu een rij $n_1, n_2, \cdots$ van natuurlijke getallen zodanig dat $f(n_k)$ een volkomen kwadraat is, voor alle natuurlijke getallen k. Definieer de rijen (n_k) en (m_k) als volgt: neem $n_1 = 2$ en $m_1 = 3$, en neem (voor alle $k \geq 1$)

$$n_{k+1} = 2m_k + 3n_k, \quad m_{k+1} = 3m_k + 4n_k.$$

Een eenvoudige berekening leert ons dat de waarde van $m_k^2 - 2n_k^2$ onafhankelijk is van de waarde van k, want $m_k^2 - 2n_k^2 = m_{k+1}^2 - 2n_{k+1}^2$ voor alle k. Omdat $m_1^2 - 2n_1^2 = 1$, geldt er dat

$$m_k^2 = 2n_k^2 + 1 = f(n_k)$$

voor alle k, en daaruit volgt het resultaat. $\square$

4. *De vierde vraag was een enigszins bizarre ongelijkheid die op een vrij nette manier kon worden opgelost (zie onderstaande oplossing). Christophe Debry en Guolong Li konden deze vraag oplossen, maar geen van beiden gaf een elegant bewijs.*
Voor $x = \frac{1}{5}$ en $y = \frac{2}{5}$ is $\frac{x^2+y^2}{y} = \frac{1}{2}$. We bewijzen nu dat

$$\frac{x^2+y^2}{y} \geq \frac{1}{2} \quad \text{of} \quad 2\left(x^2+y^2\right) \geq y$$

voor alle $x, y > 0$ met $7x^2 + 3xy + 3y^2 = 1$. Na kwadrateren moeten we bewijzen dat

$$4\left(x^2+y^2\right)^2 \geq y^2\left(7x^2+3xy+3y^2\right),$$

of nog,

$$4x^4 + x^2y^2 + y^4 \geq 3xy^3.$$

Volgens de ongelijkheid tussen rekenkundig en meetkundig gemiddelde geldt er dat

$$4x^4 + x^2y^2 + \frac{y^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^4}{4} \geq 6\sqrt[6]{4x^4 \cdot x^2y^2 \cdot \frac{y^4}{4} \cdot \frac{y^4}{4} \cdot \frac{y^4}{4} \cdot \frac{y^4}{4}} = 3xy^3,$$

en daaruit volgt het resultaat onmiddellijk. Het antwoord is dus $\frac{1}{2}$. □

5. *Ook deze vraag was een echt pareltje, maar misschien was de vraag iets te eenvoudig. Het is niet moeilijk om in te zien dat het getal irrationaal moet zijn, en dat kan op vele manieren worden aangetoond. Hieronder geef ik een oplossing die door geen enkele deelnemer werd gegeven. De deelnemers slaagden er allen in om de opgave op te lossen, proficiat!*
Het getal $\alpha = 0.a_2a_3a_4\cdots$ is irrationaal. Veronderstel immers dat α rationaal is. De decimale ontwikkeling van α kan duidelijk niet eindig zijn, dus moet de decimale ontwikkeling periodiek zijn vanaf een bepaald cijfer in die ontwikkeling. Zij p de lengte van de periode, en kies $N \in \mathbb{N}$ zodanig dat $a_n = a_{n+p}$ voor alle $n \geq N$. Kies $t \in \mathbb{N}$ zodanig dat $p^t > N$. Er moet dan gelden dat $a_{p^t} = a_{p^t+sp}$ voor alle $s \in \mathbb{N}$. Kies $s = (q-1)\cdot p^{t-1}$ waarbij q een priemgetal is dat geen deler is van p. Dan moet er gelden dat $a_{p^t} = a_{q\cdot p^t}$, en dat is een contradictie omdat $q \cdot p^t$ precies één priemdeler meer heeft dan p^t. □