Olympische competitie
November 2006

1. Zij $ABCD$ een convexe vierhoek zodat de lengten van de zijden en de diagonalen rationaal zijn. Zij S het snijpunt van de diagonalen. Bewijs dat AS, BS, CS en DS ook rationaal zijn.

2. Beschouw een convexe veelhoek $\mathcal{P}$ met oppervlakte $\mathcal{S}$ en omtrek $\mathcal{O}$. Bewijs dat er een cirkel met straal $\mathcal{S}/\mathcal{O}$ geconstrueerd kan worden die volledig binnen $\mathcal{P}$ ligt.

3. Zij $f(x)$ een niet-constante veelterm met gehele coëfficiënten. Bewijs of weerleg:

   > "Als de graad van f even is en als er oneindig veel natuurlijke getallen n bestaan zodanig dat $f(n)$ een volkomen kwadraat is, dan bestaat er een veelterm $g(x)$ met gehele coëfficiënten waarvoor geldt dat $f(x) = g(x)^2$."

4. Zijn $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ zodat $7x^2 + 3xy + 3y^2 = 1$. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van $\dfrac{x^2 + y^2}{y}$.

5. Voor alle natuurlijke getallen $n \geq 2$ definiëren we $a_n = 0$ als n een even aantal verschillende priemdelers heeft en $a_n = 1$ als n een oneven aantal verschillende priemdelers heeft. Beschouw het getal met decimale schrijfwijze $0.a_2a_3a_4a_5\cdots$: is dit getal rationaal of irrationaal?