Olympische competitie
Oktober 2006

1. Zij p een willekeurig priemgetal. Bewijs dat er oneindig veel natuurlijke getallen n bestaan zodanig dat het getal $2006^n - n$ deelbaar is door p.

2. Zij $\mathcal{P}$ een verzameling van 2006 priemgetallen. Zij $\mathcal{M}$ een verzameling van 2007 natuurlijke getallen zodat voor elke $m \in \mathcal{M}$ geldt dat elke priemfactor van m tot $\mathcal{P}$ behoort. Bewijs:

   er bestaat een deelverzameling $\mathcal{D}$ van $\mathcal{M}$ zodanig dat het product van alle elementen van de verzameling $\mathcal{D}$ een volkomen kwadraat is.

3. Een natuurlijk getal n is *machtig* als er natuurlijke getallen x, y, z en t bestaan zodat

   $$n = x^2 + y^3 + z^7 + t^{43}.$$

   Toon aan dat er oneindig veel natuurlijke getallen bestaan die niet machtig zijn.

4. Zij $ABCD$ een ruit met $\angle A = 60°$. Zijn R en S punten binnen ΔABD en ΔBCD respectievelijk zodanig dat $\angle SBR = \angle RDS = 60°$. Bewijs dat $RS^2 \geq AR \cdot CS$.

5. Zijn a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 reëele getallen zodat $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 1$. Bewijs dat

   $$(a_i - a_j)^2 \leq \frac{1}{10}$$

   voor zekere indices $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ (met $i \neq j$).