

Olympische competitie
Januari 2006

1. Zij $ABCD$ een vierhoek zodat $AD = BC$ en $\widehat{ABC} + \widehat{BAD} = 120^\circ$. Zij E een punt buiten de vierhoek zodat A en E niet aan dezelfde kant van de rechte CD liggen. Bewijs dat $\triangle AEB$ gelijkzijdig is als en slechts als $\triangle CED$ gelijkzijdig is.
2. Zijn a en b gehele getallen zodat $2^n a + b$ een volkomen kwadraat is, $\forall n \in \mathbb{N}$. Bewijs dat $a = 0$.
3. Zijn a, b en c positieve reële getallen zodat $a + b + c = 3$. Toon aan dat

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca.$$

4. Zij $\triangle ABC$ een driehoek zodat $AB = AC$. De cirkel γ raakt (intern) aan de omschreven cirkel van de driehoek, en γ raakt ook aan AB en AC in P en Q respectievelijk. Bewijs dat het midden van PQ het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van de driehoek.

Bonusvraag:

Deze stelling geldt ook voor een *willekeurige* driehoek $\triangle ABC$. Bewijs dat.

5. Zij $\varphi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ een functie zodat $\forall m, n \in \mathbb{N}_0$ geldt dat $\varphi(m) \neq \varphi(n)$ als $m - n$ priem is. Bepaal het kleinst mogelijke aantal elementen van het beeld van φ .