

Olympische competitie
 Januari 2006
Oplossing van de bonusvraag

In de olympische competitie van januari 2006 werd de volgende bonusvraag geformuleerd:

“Zij $\triangle ABC$ een willekeurige driehoek. Een cirkel γ raakt intern aan de omgeschreven cirkel van de driehoek en raakt aan de zijden AB en AC in de punten P en Q respectievelijk. Bewijs dat het midden van PQ het middelpunt is van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.”

We geven hier een elementaire oplossing van dit probleem. Merk op dat de vraag ook op een relatief snelle maar minder elementaire manier kan worden opgelost met behulp van inversie.

Zij Γ de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Zij R het punt waar de cirkels γ en Γ elkaar raken. Zijn P' en Q' de punten waar de rechten RP en RQ respectievelijk de cirkel Γ een tweede keer snijden. We bewijzen eerst een lemma dat af en toe handig kan zijn in een competitie:

Lemma. Er geldt dat $AP' = BP'$ en $AQ' = CQ'$.

Bewijs van het lemma. We bewijzen enkel de eerste uitspraak. Zij φ de homothetie met centrum R die γ afbeeldt op Γ . Zij O het middelpunt van Γ . Het is duidelijk dat P door φ wordt afgebeeld op P' . De rechte AB wordt door φ afgebeeld op de rechte ℓ die aan Γ raakt in het punt P' . Dan geldt er zeker dat $OP' \perp \ell$. Omdat $\ell \parallel AB$ is P' dan $OP' \perp AB$, en bijgevolg is P' inderdaad het midden van de cirkelboog AB . \square

Het is nu duidelijk dat $\angle ACP' = \angle BCP'$. Daaruit volgt dat CP' de bissectrice is van $\angle C$. Op analoge wijze zien we dat BQ' de bissectrice is van $\angle B$, RP de bissectrice is van $\angle ARB$ en RQ de bissectrice is van $\angle ARC$. Stel $A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$ en $\angle C = 2\gamma$. Zij I het snijpunt van BQ' en PQ . Er geldt dan dat $\angle BRP = \angle BRP' = \gamma$. Verder geldt er dat $\angle APQ = \beta + \gamma$ en $\angle ABI = \beta$, zodat $\angle PIB = \gamma = \angle PRB$. Bijgevolg is $PIRB$ een koordenvierhoek. Daaruit volgt dat $\angle PRI = \beta$. Omdat $\angle PRQ = \angle APQ = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = \beta + \gamma$ geldt er dan dat $\angle IRQ = \gamma$. Bijgevolg is $\angle IRC = \beta + \gamma = \angle AQP = 180^\circ - \angle IQC$, zodat $IRCQ$ eveneens een koordenvierhoek is. Bijgevolg geldt er dat $\angle ICQ = \angle IRQ = \gamma$, dus CI is de bissectrice van $\angle C$. We besluiten hieruit dat I het middelpunt van de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is. We weten dus al dat I op PQ ligt. Het is nu niet moeilijk om in te zien dat I dan ook het midden van PQ moet zijn. Immers, in $\triangle APQ$ is AI de bissectrice van $\angle A$, en $\triangle APQ$ is gelijkbenig met $AP = AQ$, dus deze bissectrice is ook een zwaartelijn, en we zijn klaar. \blacksquare

