Olympische competitie
December 2005
Oplossingen

Algemene opmerking. De vragen van de decembercompetitie werden bijzonder goed beantwoord. Jullie hebben me (in positieve zin) dus verbaasd, prima zo! Spijtig genoeg moest ik daarom wel vrij streng zijn bij het verbeteren, om er toch nog voor te zorgen dat er sprake was van afscheiding bij de scores. Stijl en elegantie van de oplossingen telden dus mee, en daar heb ik dus vaak een puntje van de score afgetrokken. Ik hoop dat iedereen daar mee kan leven :)

1. *Deze eenvoudige (door mijzelf gecreëerde) vraag werd door iedereen goed beantwoord. Sommige deelnemers gaven een ietwat lange en minder elegante oplossing die gebruik maakte van het binomium van Newton, maar de meesten gaven deze korte oplossing:*
We bewijzen per inductie naar n dat
$$\sin^n a + \cos^n a \in \mathbb{Q},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$
Dit is duidelijk het geval voor $n \in \{0, 1, 2\}$. Merk nu op dat
$$\sin a \cos a = \frac{(\sin a + \cos a)^2 - 1}{2} \in \mathbb{Q}.$$
Stel nu dat $\sin^k a + \cos^k a$ rationaal is voor $0 \leq k \leq n$. Uit de recursieve betrekking
$$\sin^{n+1} a + \cos^{n+1} a = (\sin^n a + \cos^n a)(\sin a + \cos a) - \sin a \cos a \left(\sin^{n-1} a + \cos^{n-1} a\right)$$
volgt dan dat $\sin^{n+1} a + \cos^{n+1} a$ rationaal is, en we zijn klaar. $\blacksquare$

2. *Ook hier was inductie het sleutelwoord. Sommige deelnemers schreven een heel opstel, of deden veel overbodige dingen, maar het kon dus heel kort. De mooiste oplossingen waren die van Guolong Li, Bert Lemmens en Arne Loosveldt.*
We geven een inductiebewijs. Veronderstel dat $s/t \in \mathcal{S}$ voor alle s, t met $0 < s < t \leq n - 1$. (Dit is duidelijk het geval voor $n = 3$). We bewijzen dat $m/n \in \mathcal{S}$ voor alle m met $0 < m < n$. Als $n = 2m$ dan is dit duidelijk het geval. Als $n < 2m$ dan is $(n - m)/m \in \mathcal{S}$ zodat
$$\frac{1}{\frac{n-m}{m} + 1} = \frac{m}{n} \in \mathcal{S},$$
en als $n > 2m$ dan is $m/(n - m) \in \mathcal{S}$ zodat
$$\frac{\frac{m}{n-m}}{\frac{m}{n-m} + 1} = \frac{m}{n} \in \mathcal{S}. \blacksquare$$

3. *Leuke vraag, maar ik verwachtte hier meer moeilijkheden. Iedereen loste de vraag correct op!*
Kies $a = n(2n - 1)$, $b = n(2n + 1)$ en $c = (2n - 1)(2n + 1)$ met $n \geq 2$ een natuurlijk getal, dan
$$a + b = n(2n - 1) + n(2n + 1) = 4n^2 = (2n - 1)(2n + 1) + 1 = c + 1.$$
De getallen a, b en c zijn dan zeker verschillend. Er geldt ook dat elk van de getallen a, b en c een deler is van het product van de andere twee, en door n te laten variëren krijgen we oneindig veel verschillende dergelijke drietallen, dus we zijn klaar. $\blacksquare$
Opmerking. Hoe vind je deze oplossing? Wel, als $a = pq$, $b = qr$ en $c = rp$ voor zekere natuurlijke getallen p, q en r dan zal zeker aan de eerste voorwaarde voldaan zijn. Als nu p, q en r verschillend zijn zullen a, b en c dat ook zijn. Er moet dan nog gelden dat
$$pq + qr = rp + 1 \text{ of } rp - pq - qr = -1 \text{ of } (r - q)(p - q) = (q - 1)(q + 1).$$
Door $r - q = q - 1$ en $p - q = q + 1$ te stellen vinden we dan de bovenstaande oplossing.

4. *Dit was een vrij bizarre vraag. Heel wat deelnemers kwamen met een (bijna volledig correcte) oplossing, maar dit was wel de slechtst beantwoorde vraag. De "speciale vermeldingen" voor een elegante oplossing gaan naar Wim Vanrie en (opnieuw) Bert Lemmens.*
Merk eerst op dat
$$-1 \leq \frac{x}{x^2+x+1} \leq \frac{1}{3}$$
voor alle $x \in \mathbb{R}$. Daaruit volgt dat de functie f dus enkel vastligt op het interval $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ en dat f "willekeurig" kan worden gekozen buiten dat interval. Stel nu $x/\left(x^2+x+1\right) = a$, dan neemt a (een continue functie van x) alle waarden van $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ aan, en er geldt dat
$$\frac{x^2}{x^4+x^2+1} = \frac{x}{x^2+x+1} \cdot \left(\frac{x^2-x+1}{x}\right)^{-1} = a \cdot \left(\frac{1}{a} - 2\right)^{-1} = \frac{a^2}{1-2a}.$$
Er geldt dus dat
$$f(x) = \frac{x^2}{1-2x} \text{ als } x \in \left[-1, \frac{1}{3}\right],$$
en buiten dat interval kan f willekeurig gekozen worden. ■

5. *Dit is een mooie meetkundevraag, en om eerlijk te zijn had ik niet verwacht dat deze zo goed beantwoord ging worden. Ik geef hier mijn oorspronkelijke oplossing, die gebruik maakt van macht van een punt tot een cirkel. Geen enkele deelnemer gaf deze oplossing, maar hier valt dus wel iets uit te leren: macht van een punt is een krachtig (machtig) wapen! De meeste deelnemers die deze vraag oplosten rekenden veel meer met hoeken om de congruentie van de driehoeken aan te tonen. Clara Mertens had het ingenieuze idee om het spiegelbeeld van B in de middelloodlijn van CD te construeren, en Arne Loosveldt gaf een oplossing met behulp van goniometrie waar ik een paar nachten lang nachtmerries aan over heb gehouden... ;) De vermeldingen voor de mooiste oplossingen gaan naar Jan Vonk en Christophe Debry.*
We veronderstellen in deze oplossing dat het punt L op het lijnstuk CD ligt. Het andere geval (waarbij K op BC ligt) is volledig analoog. Als $AB = AD$ is de stelling triviaal, dus we veronderstellen dat dat niet het geval is. Merk op dat $\angle ALD = \angle LAB = \angle DAL$, zodat ΔADL gelijkbenig is met $DL = AD = BC$. Op analoge wijze is $CL = CK$ en $CD = BK$. Nu hebben de punten B en D gelijke machten ten opzichte van de omgeschreven cirkel van ΔCLK, aangezien $BC \cdot BK = DL \cdot DC$. Aangezien de macht van B tot deze cirkel ook gelijk is aan $OB^2 - R^2$ (met R de straal van deze cirkel) geldt er dat $OB^2 - R^2 = OD^2 - R^2$ of $OB = OD$. Omdat ook $OL = OC$ en $DL = BC$ geldt er dan dat $\Delta OLD \cong \Delta OCB$. Daaruit volgt dat $\angle ODC = \angle ODL = \angle OBC$, zodat $BCOD$ inderdaad een koordenvierhoek is. ■