Olympische competitie
December 2005

1. Zij a een reëel getal zodat $\sin a + \cos a$ een rationaal getal is. Toon aan dat

$$\sin^{2005} a + \cos^{2005} a$$

dan ook een rationaal getal is.

2. Zij $\mathcal{S}$ een verzameling van reële getallen zodat

   (a) $\frac{1}{2} \in \mathcal{S}$, en

   (b) als $x \in \mathcal{S}$, dan is $(x+1)^{-1} \in \mathcal{S}$ en $x \cdot (x+1)^{-1} \in \mathcal{S}$.

   Toon aan dat $\mathcal{S}$ alle rationale getallen tussen 0 en 1 bevat.

3. Bewijs dat er oneindig veel drietallen (a, b, c) van natuurlijke getallen bestaan, zodat

   (a) elk van deze getallen een deler is van het product van de twee andere getallen,

   (b) $a \neq b \neq c \neq a$, en

   (c) $a + b = c + 1$.

4. Bepaal alle functies $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zodat

$$f\left(\frac{x}{x^2+x+1}\right) = \frac{x^2}{x^4+x^2+1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

5. Zij $ABCD$ een parallellogram. De rechten BC en CD snijden de bissectrice van $\widehat{BAD}$ in de punten K en L respectievelijk. Zij O het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔCKL. Bewijs dat O op de omgeschreven cirkel van ΔBCD ligt.