Olympische competitie
November 2005
Oplossingen

1. *Deze vraag was misschien wel té gemakkelijk want geen enkele deelnemer had hier moeite mee.* We moeten aantonen dat er minstens één factor 3 en twee factoren 2 voorkomen in het product

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

Een geheel getal geeft steeds rest 0, 1 of 2 bij deling door 3. Omdat er in dit geval vier natuurlijke getallen a, b, c en d gegeven zijn, geven twee van deze getallen dezelfde rest bij deling door 3 (volgens het duivenhokprincipe.) Bijgevolg is hun verschil deelbaar door 3, dus het product bevat minstens een factor 3. Nu kijken we naar de *pariteit* van de getallen. Als minstens 3 van de gegeven getallen dezelfde pariteit hebben, dan bevat het product minstens 3 factoren 2. Als twee van de getallen even zijn en twee van de getallen oneven zijn, dan hebben we opnieuw twee even verschillen. In alle mogelijke gevallen is het product dus deelbaar door 4. Omdat het product ook deelbaar is door 3, is 12 een deler is van het gegeven getal. ■

2. *Een groot aantal deelnemers heeft zich laten vangen bij dit (nochtans niet zo ingewikkeld) telprobleem. Een aantal deelnemers gaf daarentegen een mooie en gestructureerde oplossing. De elegantste oplossingen waren van Christophe Debry en Guolong Li.*
Zijn a, b en c de lengten van de zijden van deze driehoek. We mogen veronderstellen, zonder verlies van de algemeenheid, dat $1 \leq a \leq b \leq c$. Er bestaat een dergelijke driehoek met zijden a, b en c als en slechts als $a+b > c$. We moeten dus het aantal drietallen (a,b,c) van natuurlijke getallen tellen waarvoor geldt dat

$$a \leq b \leq c, \ a+b+c = 2005, \ a+b > c.$$

Het is duidelijk dat $c \geq \frac{2005}{3}$, dus $c \geq 669$, en dat $2c < a+b+c = 2005$, dus $c \leq 1002$. Bijgevolg is $669 \leq c \leq 1002$. We definiëren x_n als het aantal koppels (a,b) van natuurlijke getallen waarvoor geldt dat $a+b = 2005-n$ en $a \leq b \leq n$. Het aantal dergelijke driehoeken is dan gelijk aan $x_{669} + x_{670} + \cdots + x_{1002}$. Het is duidelijk dat $x_{669} = 2$: inderdaad, de mogelijke koppels zijn $(668,668)$ en $(667,669)$. Verder is $x_{670} = 3$: de mogelijke koppels zijn $(665,670)$, $(666,669)$ en $(667,668)$. Na nog wat zoekwerk vinden we dat $x_{671} = 5$, $x_{672} = 6$, $x_{673} = 8$, etcetera. We moeten dan nog wel bewijzen dat $x_{2m+1} = x_{2m} + 2$ en $x_{2m} = x_{2m-1} + 1$, maar dat is niet moeilijk. (Dit laat ik over aan de lezer als een oefening.) Uiteindelijk vinden we dan dat $x_{1002} = 501$, en het totaal aantal driehoeken is dus gelijk aan

$$2+3+5+6+\cdots+500+501 = \frac{334}{2} \cdot 503 = 84001,$$

omdat de bovenstaande som uit 334 termen bestaat, en omdat men telkens twee termen kan combineren om 503 te bekomen: $501+2 = 500+3 = 498+5 = \cdots = 503$. ■

3. *Vlaamse scholieren hebben meestal wel moeite met meetkunde, maar geen enkele deelnemer had het moeilijk met deze eenvoudige vraag. Bovendien waren de meeste oplossingen elegant!*
Stel $\widehat{SAT} = \alpha$. Omdat BS en BT raaklijnen zijn aan C_2, is

$$\widehat{BST} = \widehat{BTS} = \widehat{SAT} = \alpha$$

(stelling van de raakomtrekshoek). In driehoek ΔBST geldt er dus dat

$$\widehat{PBQ} = \widehat{SBT} = 180° - \widehat{BST} - \widehat{BTS} = 180° - 2\alpha$$

(som van de hoeken van een driehoek). Omdat $APBQ$ een koordenvierhoek is, geldt er dat

$$\widehat{PAQ} = 180° - \widehat{PBQ} = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha = 2\widehat{SAT}$$

(overstaande hoeken van een koordenvierhoek zijn supplementair), en we zijn klaar. ■

4. *Heel wat deelnemers slaagden er in om deze vraag op te lossen, maar niet alle oplossingen waren volledig en een aantal oplossingen bevatten onnodig veel rekenwerk. Het was blijkbaar moeilijk om een oplossing voor deze vraag goed neer te schrijven: Wim Vanrie verdient hier dus een pluim, want hij diende een zeer duidelijke en volledige oplossing in.*

   We zullen bewijzen dat enkel de volkomen kwadraten niet in deze vorm kunnen worden geschreven. We definiëren $f(n) = n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}$. Veronderstel dat m een natuurlijk getal is dat niet in deze rij voorkomt. We weten dat

$$[f(n)] \neq m,\ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} : f(N) < m,\ m+1 < f(N+1).$$

   Duidelijk? Daaruit volgt dan dat

$$\sqrt{N} < m - N - \frac{1}{2} < \sqrt{N+1}$$

   of

$$N < (m-N)^2 - (m-N) + \frac{1}{4} < N+1$$

   of

$$N - \frac{1}{4} < (m-N)^2 - (m-N) < N + \frac{3}{4}$$

   en omdat $(m-N)^2 - (m-N) \in \mathbb{N}$ geldt er dan dat

$$(m-N)^2 - (m-N) = N \Rightarrow m = (m-N)^2.$$

   Bijgevolg is m een volkomen kwadraat. We weten nu dat m een volkomen kwadraat is *als m niet in de gevraagde vorm kan worden geschreven*, maar dat is nog niet genoeg om te besluiten dat *alle* volkomen kwadraten niet in deze vorm kunnen worden geschreven. We zijn er echter bijna. Zij k een natuurlijk getal en beschouw de getallen $[f(n)]$ voor $n = 1, 2, \ldots, k^2$. Dit zijn k^2 verschillende getallen, en deze getallen behoren allemaal tot $\{1, 2, \ldots, k^2 + k\}$. Omdat er precies k volkomen kwadraten bestaan in de verzameling $\{1, 2, \ldots, k^2 + k\}$ kunnen we hieruit besluiten dat wel degelijk *alle* volkomen kwadraten "wegvallen", en we zijn klaar. ■

5. *Dit was een moeilijke vraag, en als je nog nooit van een ongelijkheid zoals die van Cauchy had gehoord, dan was dit een onmogelijke opgave. Enkel Clara Mertens gaf een correcte oplossing en ze deed dat dan ook nog op een bijzonder elegante manier. Proficiat!*

   Stel $t_i = \sin x_i$. We weten dat $\sum_{i=1}^{10} t_i^2 = 1$ en we moeten bewijzen dat

$$\sum_{i=1}^{10} \sqrt{1 - t_i^2} \geq 3 \cdot \sum_{i=1}^{10} t_i.$$

   Merk op dat

$$9\left(1 - t_1^2\right) = 9\left(t_2^2 + t_3^2 + \cdots + t_{10}^2\right) \geq \left(t_2 + t_3 + \cdots + t_{10}\right)^2,$$

   volgens de ongelijkheid van Cauchy. Bijgevolg is

$$\sqrt{1 - t_1^2} \geq \frac{1}{3}t_2 + \frac{1}{3}t_3 + \cdots + \frac{1}{3}t_{10}.$$

   Op analoge wijze tonen we aan dat

$$\sqrt{1 - t_2^2} \geq \frac{1}{3}t_3 + \frac{1}{3}t_4 + \cdots + \frac{1}{3}t_1,$$

$$\cdots$$

$$\sqrt{1 - t_{10}^2} \geq \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{3}t_2 + \cdots + \frac{1}{3}t_9.$$

   Door deze ongelijkheden bij elkaar op te tellen vinden we het resultaat. ■