Olympische competitie
November 2005

1. Zijn a, b, c en d natuurlijke getallen. Bewijs dat

$$(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)$$

deelbaar is door 12.

2. Hoeveel verschillende driehoeken bestaan er waarvoor geldt:

   (a) de lengten van de zijden van deze driehoek zijn natuurlijke getallen, en

   (b) de omtrek van deze driehoek is gelijk aan 2005?

3. Zijn C_1 en C_2 gegeven cirkels die elkaar raken in het punt A (waarbij C_2 binnen C_1 ligt). Beschouw een willekeurig punt B (verschillend van A) op C_1. Zijn P en Q punten op C_1 zodat de koorden BP en BQ raken aan C_2 in de punten S en T respectievelijk. Toon aan dat

$$\widehat{PAQ} = 2\widehat{SAT}.$$

4. We definiëren het getal $[x]$ als het grootste natuurlijk getal, kleiner dan of gelijk aan x, $\forall x \in \mathbb{R}$. Welke natuurlijke getallen kunnen niet worden geschreven als

$$\left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right],$$

met n een natuurlijk getal?

5. Zijn $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ reële getallen in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ zodat

$$\sin^2 x_1 + \sin^2 x_2 + \cdots + \sin^2 x_{10} = 1.$$

Toon aan dat

$$\frac{\cos x_1 + \cos x_2 + \cdots + \cos x_{10}}{\sin x_1 + \sin x_2 + \cdots + \sin x_{10}} \geq 3.$$