

## Olympische competitie

Oktober 2005

### Oplossingen

1. *Deze vraag was als een eenvoudige opwarmer bedoeld, maar viel iets moeilijker uit dan verwacht. Klassieke vlakke meetkunde is nu eenmaal niet zo populair in Vlaanderen, en dat is een spijtige zaak. De enige deelnemers die tot een elegante synthetische oplossing kwamen zijn Jan Vonk en Guolong Li. Andere deelnemers, zoals Clara Mertens en Bert Lemmens, gaven een correcte maar minder mooie oplossing die gebruik maakt van goniometrie.*

Zij  $M$  het voetpunt van de loodlijn vanuit  $A$  op  $KL$ . Omdat  $\triangle AMK$  en  $\triangle ABK$  congruente rechthoekige driehoeken zijn, geldt er dat  $|AM| = |AB| = |AD|$ . Bijgevolg zijn de rechthoekige driehoeken  $\triangle AML$  en  $\triangle ADL$  congruent, zodat  $\widehat{MAL} = \frac{1}{2}\widehat{MAD}$  en  $\widehat{MAK} = \frac{1}{2}\widehat{MAB}$ , en

$$\widehat{KAL} = \widehat{MAL} + \widehat{MAK} = \frac{1}{2}\widehat{MAD} + \frac{1}{2}\widehat{MAB} = \frac{1}{2}\widehat{BAD} = 45^\circ.$$

2. *Dit was misschien wel de makkelijkste vraag van de oktobercompetitie... Iedereen loste de vraag min of meer correct op, maar niet iedereen was even consistent of nauwkeurig bij het opschrijven van de oplossing. Als je een "patroon" opmerkt, dan moet je dat natuurlijk bewijzen! Hier hebben sommige deelnemers dus onnodig punten verloren.*

We bepalen alle mogelijke resten bij deling van  $2^n$  door 7. Als  $n = 3k$  met  $k \in \mathbb{N}$  dan is  $2^n \equiv 8^k \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{7}$ . Als  $n = 3k + 1$  dan is  $2^n \equiv 2 \cdot 8^k \equiv 2 \cdot 1 \equiv 2 \pmod{7}$  en als  $n = 3k + 2$ , dan is  $2^n \equiv 4 \cdot 8^k \equiv 4 \cdot 1 \equiv 4 \pmod{7}$ . Bijgevolg is  $2^n - 1$  deelbaar door 7 als en slechts als  $n$  een drievoud is. Omdat  $2^n + 1 \equiv 2, 3$  of  $5 \pmod{7}$  bestaat er geen enkel natuurlijk getal  $n$  zodat  $2^n + 1$  deelbaar is door 7.

3. *Dit is een grappige vraag die er op het eerste zich wat afschrikwekkend uitziet maar helemaal niet zo moeilijk is. Alle deelnemers, op één deelnemer na, scoorden 7 punten voor deze vraag. Er werden heel wat verschillende en creatieve oplossingen gevonden.*

Het is niet moeilijk om in te zien dat het onmogelijk is om 38 te schrijven als de som van twee oneven samengestelde getallen. Het volstaat dus om aan te tonen dat alle even getallen groter dan of gelijk aan 40 wel als de som van twee oneven samengestelde getallen kunnen worden geschreven. Deze even getallen kunnen we onderverdelen in 5 verschillende klassen:

$$10k + 40 = 5(2k + 3) + 25$$

$$10k + 42 = 5(2k + 3) + 27$$

$$10k + 44 = 5(2k + 7) + 9$$

$$10k + 46 = 5(2k + 5) + 21$$

$$10k + 48 = 5(2k + 3) + 33$$

voor  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Bijgevolg kunnen al deze getallen in de gevraagde vorm worden geschreven.

4. *De moeilijkste vraag van de oktobercompetitie! Enkel Jan Vonk gaf een volledig correct bewijs, dat bovendien ook nog elegant was (maar iets ingewikkelder dan het onderstaande bewijs). Guolong Li en Bert Lemmens hadden goede ideeën maar wisten die niet volledig correct neer te schrijven en te bewijzen.*

Merk op dat  $2ka_k - (2k - 3)a_{k-1} = 0$  of

$$a_{k-1} = 2(k-1)a_{k-1} - 2ka_k, \quad \forall k \in \{2, 3, \dots\}.$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2005} \\ &= (2a_1 - 4a_2) + (4a_2 - 6a_3) + (6a_3 - 8a_4) + \dots + (4010a_{2005} - 4012a_{2006}) \\ &= 2a_1 - 4012a_{2006} = 1 - 4012a_{2006} < 1. \end{aligned}$$

5. *Dit is een heel moeilijke vraag, maar een verrassend groot aantal deelnemers loste deze vraag correct op (op een paar onnauwkeurigheden na). Als je niet zag dat alle veelvouden van 6 kunnen worden geschreven als de som van 4 derdemachten was dit een onmogelijke opgave. Deze vraag werd op een correcte en elegante wijze opgelost door Jens Vande Cavey, Clara Mertens, Guolong Li en Wim Vanrie. Mooi zo!*

Omdat

$$(k+1)^3 + (k-1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3 = 6k$$

kunnen we alle veelvouden van 6 schrijven als de som van vier derdemachten van gehele getallen. Nu geldt er dat  $n - n^3 = -(n-1)n(n+1)$  deelbaar is door 6,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , omdat een van de getallen  $n$  en  $n+1$  even is, en omdat een van de getallen  $n-1$ ,  $n$  en  $n+1$  een veelvoud van 3 moet zijn. Bijgevolg bestaan er gehele getallen  $x_1, x_2, x_3, x_4$  zodat

$$n - n^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3,$$

dus  $n$  kan worden geschreven als de som van vijf derdemachten van gehele getallen:

$$n = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + n^3.$$