Olympische competitie
Oktober 2005

1. Zij $ABCD$ een vierkant, en zijn K en L punten op de zijden BC en CD respectievelijk zodat

$$\widehat{AKB} = \widehat{AKL}.$$

   Bepaal de grootte van $\widehat{KAL}$.

2. (a) Bepaal alle natuurlijke getallen n zodat $2^n - 1$ deelbaar is door 7.

   (b) Bestaat er een natuurlijk getal n zodat $2^n + 1$ deelbaar is door 7?

3. Een *samengesteld* getal is een natuurlijk getal dat niet priem is. Vind het grootste even natuurlijk getal dat men niet kan schrijven als de som van twee oneven samengestelde getallen.

4. Zij $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ een rij van reële getallen zodat $a_1 = \frac{1}{2}$ en

$$a_n = \left(\frac{2n-3}{2n}\right) \cdot a_{n-1}, \ \forall n \in \{2, 3, \dots\}.$$

   Toon aan dat

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{2005} < 1.$$

5. Zij n een geheel getal. Bewijs dat er gehele getallen x_1, x_2, x_3, x_4 en x_5 bestaan zodat

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + x_5^3 = n.$$