

## Beloftencompetitie

April 2007

1. Gegeven zijn zeven natuurlijke getallen. De som van elke drie van deze getallen is deelbaar door 5, en de som van elke vijf van deze getallen is deelbaar door 3. Bewijs dat elk van de zeven getallen deelbaar is door 15.
2. Gegeven zijn drie natuurlijke getallen  $x, y, z$ , elk groter dan 1. Is het mogelijk dat  $x^2 - 1$  deelbaar is door  $y$  en  $z$ ,  $y^2 - 1$  deelbaar is door  $z$  en  $x$ , en  $z^2 - 1$  deelbaar is door  $x$  en  $y$ ?
3. 2007 dorpen zijn verbonden door een aantal wegen. Vanuit elk dorp vertrekken minstens drie wegen naar drie verschillende dorpen. Bewijs dat we een route kunnen vinden die begint en eindigt in eenzelfde dorp, tussenin geen enkel dorp twee keer aandoet, en waarbij het aantal bezochte dorpen groter dan 2 en geen veelvoud van 3 is.
4. Een (convexe) vierhoek  $ABCD$  heeft de eigenschap dat

$$\begin{aligned}AB &= BC \\ \angle ABD &= 2\angle CDB \\ \angle CBD &= 2\angle ADB\end{aligned}$$

Bewijs dat

$$AD = DC$$

5. Gegeven is een strikt stijgende functie  $f$  van de **strikt positieve** reële getallen naar de reële getallen, waarvoor geldt dat

$$f\left(\frac{2xy}{x+y}\right) \geq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

voor alle strikt positieve reële getallen  $x$  en  $y$ . Bewijs dat  $f$  negatieve waarden aanneemt.