Beloftencompetitie
Maart 2007

1. De vierhoek $ABCD$ is ingeschreven in een cirkel met middelpunt O. Daarbij zijn de koorden AB en CD even lang. Zij M het midden van AB, N het midden van CD en P het midden van MN. Bewijs dat P op de cirkel met diameter MO ligt.

2. Noteer alle priemgetallen van klein naar groot als $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, \cdots, p_k, \cdots$. Zij n een willekeurig natuurlijk getal. Voor twee natuurlijke getallen a, b geldt dat

$$a \cdot b = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \cdots \cdot p_n$$

en $a + b < p_{n+1}^2$. Bewijs dat $a + b$ priem is.

3. Zij d_n het n'de decimale cijfer na de komma van van $\sqrt{2}$. Bewijs dat d_n niet 0 kan zijn voor alle natuurlijke getallen n met $1000000 < n \leq 3000000$.

4. Op een getal mag men twee operaties doen:

   - Een cijfer 0, 4 of 8 achteraan het getal bijvoegen.
   - Het getal halveren als het even is.

   Bewijs dat men, vertrekkende van het getal 4, na een eindig aantal operaties, elk (willekeurig gekozen) natuurlijk getal (verschillend van 0) kan bekomen.

   Bijvoorbeeld: 51 kan bekomen worden door $4 \to 40 \to 20 \to 204 \to 102 \to 51$.

5. De vijfhoek $ABCDE$ is ingeschreven in een cirkel. Daarbij is $\angle ABE = \angle BEC = \angle ECD = 45°$. De *gebroken lijn* $ABECD$ verdeelt de cirkel in twee delen. (Een deel aan elke kant van de gebroken lijn.) Bewijs dat beide delen een gelijke oppervlakte hebben.