Beloftencompetitie: oplossingen
Februari 2007

1. *We bewijzen de stelling door te tellen dat elke zijde maar met een beperkt aantal diagonalen evenwijdig kan zijn. Vervolgens stellen we vast dat er gewoon te veel diagonalen zijn om allen evenwijdig te zijn met een zijde.*

   Neem een willekeurige $2m$-hoek (m natuurlijk en groter dan 1). Neem een willekeurige zijde hiervan. We tellen hoeveel diagonalen met deze zijde evenwijdig kunnen zijn. Beschouw de evenwijdige diagonaal die het verst van de zijde verwijderd is. Omdat de veelhoek convex is, liggen alle andere evenwijdige diagonalen tussen deze verste diagonaal en de zijde in. Aan de andere kant van de verste diagonaal ligt minstens een hoekpunt van de veelhoek, anders zou deze verste diagonaal geen diagonaal maar een zijde van de veelhoek zijn. Tussen de verste diagonaal en de zijde liggen dus ten hoogste $2m-5$ hoekpunten, die nog voor maximaal voor $m-3$ andere evenwijdige diagonalen kunnen zorgen. (Evenwijdige lijnen kunnen natuurlijk geen punt gemeenschappelijk hebben.) In totaal kunnen er dus maximaal $m-2$ diagonalen evenwijdig zijn met een bepaalde zijde.

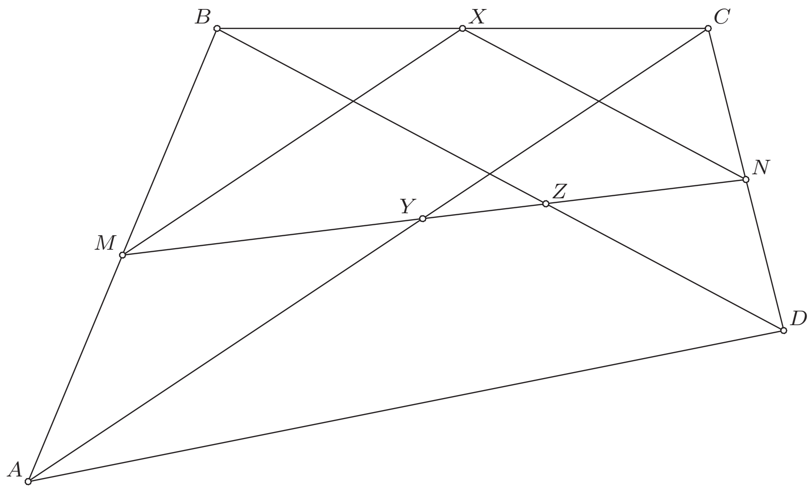
   Aangezien er $2m$ zijden zijn, kunnen er $2m^2-4m$ diagonalen evenwijdig zijn met een zijde. Een $2m$-hoek heeft echter $\dfrac{2m(2m-3)}{2} = 2m^2-3m$ diagonalen. (Vanuit elk van de $2m$ hoekpunten loopt er een diagonaal naar de $2m-3$ niet-aangrenzende hoekpunten. Zo tellen we de diagonalen dubbel, want elke diagonaal grenst aan juist twee hoekpunten.) Er is dus zeker een diagonaal die niet evenwijdig is met een zijde.

2. *Door ook het midden van BC te beschouwen, is een vrij korte oplossing mogelijk. Het goede inzicht krijgen is echter helemaal niet evident.*

   Zij X het midden van BC. Uit de gelijkvormigheid van ABC en MBX volgt eenvoudig dat MX evenwijdig is met en half zo lang als AC. Analoog is NX evenwijdig met en half zo lang als BD.

   Zij Y het snijpunt van AC en MN en Z het snijpunt van BD en MN. Omdat MN de twee diagonalen onder dezelfde hoek snijdt, is ofwel $\angle MZB = \angle NYA$, ofwel $\angle MZB = \angle NYC$. In het eerste geval zouden beide diagonalen echter evenwijdig zijn, wat onmogelijk is. Er geldt dus dat $\angle MZB = \angle NYC$.

   Uit de evenwijdigheid in de eerste paragraaf van deze oplossing volgt meteen dat $\angle MNX = \angle NMX$. Bijgevolg is de driehoek MXN gelijkbenig, meer bepaald $MX = NX$. Beide diagonalen zijn dubbel zo lang als een van deze twee lijnstukken, en zijn dus ook gelijk.



3. *Een voorbeeld was hier snel gevonden en niet essentieel in de vraag. Maar het is altijd nuttig om eerst enkele voorbeelden te zoeken om meer inzicht te krijgen in de vraag, ook als dat niet expliciet gevraagd is. De sleutel tot het bewijs van $3m < n$ was het bekijken van het verschil $n - m$.*

   Een voorbeeld is snel gevonden, zoals $m = 1, n = 8$ of $m = 8, n = 49$. Voor deze voorbeelden geldt inderdaad $3m < n$. We bewijzen dit algemeen.

   Stel dat m en n aan de vraag voldoen, dus $mn + m$ en $mn + n$ zijn beide volkomen kwadraten groter dan m^2. We kunnen dus schrijven dat $mn + m = (m + a)^2$ en $mn + n = (m + b)^2$. Bijgevolg is

   $$n - m = (mn + n) - (mn + m) = (m + b)^2 - (m + a)^2 = (b - a)(2m + a + b)$$

   Omdat $b > a > 0$ is
   $$n - m = (b - a)(2m + a + b) > 2m$$
   en dus
   $$n > 3m$$

4. *Bij schaakbordvragen zoals deze, is de sleutel tot de oplossing vaak het creatief nummeren of inkleuren van de vakjes. Ook in deze vraag is dat de manier om aan te tonen dat minstens 9 vakjes leeg blijven. Dat 9 lege vakjes ook effectief bereikt kan worden, is aan te tonen door een voorbeeld te geven. Dat laatste laten we aan de lezer, wegens gebruik aan tijd en tekentalent van schrijvende.*

   Nummer de rijen en kolomen van 1 tot 9. Kleur elk vakje

   - in een oneven rij en oneven kolom blauw. Zo zijn er 25.
   - in elk vakjes in een even rij en even kolom rood. Zo zijn er 16.

   Het is duidelijk dat elke kever op een blauw vakje naar een rood vakje gaat, en omgekeerd. De andere kevers kunnen niet op een blauw of rood vakje komen. Na het fluitsignaal blijven er dus zeker $25 - 16 = 9$ (blauwe) vakjes leeg.

   We laten het aan de lezer om een patroon te vinden zodat er slechts 9 (en niet meer dan 9) vakjes leeg zijn na het fluitsignaal. Beschouw hiervoor de blauw/rode vakjes en de andere vakjes apart. Merk op dat dit een essentieel deel van de oplossing is, als je geen dergelijk voorbeeld geeft, kan het antwoord ook nog groter dan 9 zijn.

5. *In het bewijs maken we verschillende keren gebruik van de ongelijkheid tussen rekenkundig gemiddelde en meetkundig gemiddelde (*arithmetic mean-geometric main*, afgekort* AMGM*) voor twee veranderlijken. Hiermee bedoelen we dat voor positieve reële getallen x, y geldt dat*

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

Dit volgt rechtstreekt uit het feit dat $(x-y)^2 \geq 0$. De ongelijkheid is te veralgemenen naar meerdere veranderlijken:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

Wegens AMGM is

$$\sqrt{yz} \leq \frac{y+z}{2}$$
$$\sqrt{zx} \leq \frac{z+x}{2}$$
$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

en dus

$$\begin{aligned} x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy} &\leq x\frac{y+z}{2} + y\frac{z+x}{2} + z\frac{x+y}{2} \\ &= yz + zx + xy \end{aligned}$$

Door opnieuw drie keer AMGM toe te passen, is

$$yz \leq \frac{y^2+z^2}{2}$$
$$zx \leq \frac{z^2+x^2}{2}$$
$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

Optellen levert

$$yz + zx + xy \leq x^2 + y^2 + z^2$$

Bijgevolg is

$$\begin{aligned} yz + zx + xy &= \frac{(2yz+2zx+2xy)+(yz+zx+xy)}{3} \\ &\leq \frac{(2yz+2zx+2xy)+(x^2+y^2+z^2)}{3} \\ &= \frac{(x+y+z)^2}{3} \end{aligned}$$

Wat het te bewijzen voltooit.