Beloftencompetitie
Februari 2007

1. Zij n een even natuurlijk getal groter dan 2. Bewijs dat elke convexe n-hoek een diagonaal heeft die met geen enkele zijde evenwijdig is.

2. Zij $ABCD$ een convexe vierhoek. Noem de middens van AB en CD respectievelijk M en N. Gegeven is dat MN de twee diagonalen van $ABCD$ onder dezelfde hoek snijdt. Bewijs dat de twee diagonalen even lang zijn.

3. Vind twee verschillende natuurlijke getallen $m < n$ zodat $mn + n$ en $mn + m$ beiden een volkomen kwadraat zijn. Bewijs ook dat hiervoor steeds moet gelden dat $3m < n$.

4. Op elk vakje van een 9×9 *schaakbord* zit één getrainde kever. Wanneer een fluitsignaal wordt gegeven, verplaatst elke kever zich naar een ander vakje, dat een hoekpunt maar geen zijde gemeenschappelijk heeft met zijn oorspronkelijke vakje. Hierbij mogen verschillende kevers op hetzelfde vakje komen. Bepaal het minimaal aantal lege vakjes na het fluitsignaal.

5. Bewijs dat voor alle positieve reële getallen x, y, z geldt dat

$$\frac{(x+y+z)^2}{3} \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{zx} + z\sqrt{xy}$$