Beloftencompetitie
Oplossingen januari 2007

1. *De eerste vraag was een eenvoudige meetkundevraag. Basistechieken voor het omgaan met oppervlakten van driehoeken volstonden om tot een oplossing te komen. Alle deelnemers behaalden dan ook een perfecte score op dit probleem.*

   We noteren de oppervlakte van een driehoek ABC met $[ABC]$. Analoog noteren we de oppervlakte van een vierhoek $ABCD$ met $[ABCD]$.

   We maken veelvuldig gebruik van de volgende eigenschap: $[BAC]$ en $[DAE]$, waarbij B, C, D en E op dezelfde rechte liggen, verhouden zich als $\frac{BC}{DE}$. Dit is omdat de oppervlakten van de driehoeken gegeven zijn door respectievelijk $\frac{1}{2}BC \cdot d(BC, A)$ en $\frac{1}{2}DE \cdot d(DE, A)$ en omdat $d(BC, A) = d(DE, A)$.

   Uit de gegevens volgt meteen dat $AB = 3 \cdot AM = 3 \cdot MN$ en $CD = 3 \cdot CP = 3 \cdot PC$. Daarom is

$$[BCA] = 3[MCA]$$
$$[DAC] = 3[PAC]$$

   en door de som te nemen

$$[ABCD] = [BCA] + [DAC] = 3([MCA] + [PAC]) = 3[AMCP]$$

   wat de eerste gelijkheid bewijst.

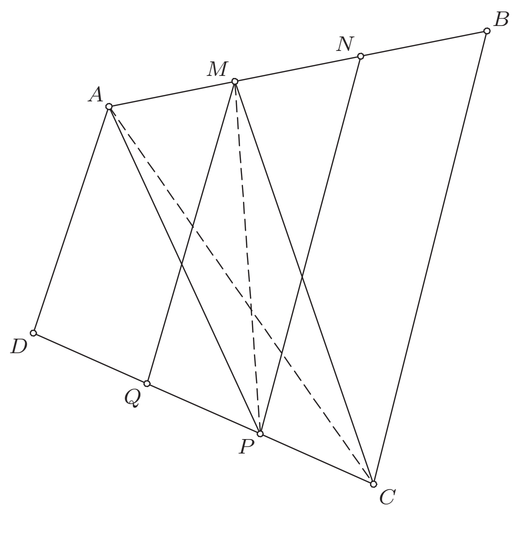
   Voor de tweede gelijkheid verdelen we $AMCP$ volgens de andere diagonaal (MP), en gebruiken we dat

$$[MPA] = [NPM]$$
$$[PMA] = [QMP]$$

   en dus door de som te nemen

$$[AMCP] = [MPA] + [PMA] = [NPM] + [QMP] = [MNPQ]$$

   wat het bewijs voltooit.



2. *De deelnemers probeerden uit de formule* $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ *rechtstreeks het te bewijzen te halen. Dit vraagt echter een niet evidente en omslachtige analyse van het aantal factoren* p *in teller en noemer. Veel eleganter is het gebruik van een klein lemma, zoals in de modeloplossing.*

   We gebruiken het volgende lemma: voor alle natuurlijke n, i met $1 \leq i \leq n$ geldt

$$i \cdot \binom{n}{i} = n \cdot \binom{n-1}{i-1}$$

   Bewijs 1: We gebruiken de formule voor $\binom{n}{i}$ met faculteiten:

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} = \frac{n}{i}\frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} = \frac{n}{i}\binom{n-1}{i-1} \quad \square$$

   Bewijs 2: We tellen op hoeveel manieren we een deelverzameling van i elementen uit een verzameling van n elementen kunnen kiezen, waarbij we één van de i elementen speciaal aanduiden. Enerzijds kan dit door eerst i elementen uit n te kiezen, en vervolgens een van de i elementen aan te duiden. Dit levert de uitdrukking in het linkerlid. Anderzijds kan dit door eerst een van de n elementen speciaal aan de duiden, en vervolgens uit de $n-1$ overgebleven elementen er nog $i-1$ te kiezen om de deelverzameling van i elementen te vervolledigen. Dit levert de uitdrukking in het rechterlid. Omdat beide uitdrukkingen dezelfde hoeveelheid aangeven, moeten ze gelijk zijn. $\square$

   Er geldt dus dat

$$i \cdot \binom{p^r}{i} = p^r \cdot \binom{p^r-1}{i-1}$$

   Omdat $\binom{p^r-1}{i-1}$ geheel is, is p^r een deler van $i \cdot \binom{p^r}{i}$. Omdat $i < p^r$, is p^r geen deler van i. Daarom is er zeker een priemfactor p van p^r die $\binom{p^r}{i}$ deelt. Omdat p priem is, moet dus p een deler zijn van $\binom{p^r}{i}$.

3. *Bij de derde vraag moest je aannemen dat de drie ongelijkheiden allen geldig waren en vervolgens tot een contradictie komen. Tot die tegenspraak kon je op veel verschillende manieren komen. De volgende elegante oplossing werd gegeven door Mohamed Ahkim.*

   Stel uit het ongerijmde dat er wel positieve reële getallen a, b, c, d bestaan zodat alle drie ongelijkheden gelden.

   De derde ongelijkheid kunnen we eenvoudig herschrijven tot

$$ad(b-c) + bc(a-d) > 0$$

   Omdat a, b, c, d positief zijn, kunnen $b-c$ en $a-d$ niet beiden negatief zijn.

   Door de tweede gelijkheid te herschrijven krijgen we dat

$$ad + bd < (a-d)(b-c)$$

   Opdat het rechterlid positief is, moeten $b-c$ en $a-d$ hetzelfde teken hebben, en dus beiden postief zijn.

   Uit $b-c \geq 0$ en $a-d \geq 0$ volgt dan meteen dat $a+d \geq c+d$, wat in tegenspraak is met de eerste gegeven ongelijkheid $a+d < c+d$. De gegeven ongelijkheden kunnen dus niet alledrie waar zijn.

4. *De vierde vraag was een leuk getaltheorieprobleem, waarvoor zowel Mats als Mohamed de modeloplossing vonden.*

   Zij n een natuurlijk getal zodat $x = 2 + 2\sqrt{1 + 12n^2}$ geheel is. Dan moet $1 + 12n^2$ duidelijk een (oneven) volkomen kwadraat zijn, anders is x irrationaal. Bijgevolg is

$$1 + 12n^2 = (2m + 1)^2$$

   voor een bepaalde natuurlijke m. Uitwerken van de vorige gelijkheid geeft dat

$$3n^2 = m(m + 1)$$

   Nu zijn m en $m+1$ relatief priem. Juist een van beiden is dus deelbaar door 3, en de ander is een volkomen kwadraat. Als $m+1$ deelbaar is door 3, is m een kwadraat met rest 2 bij deling door 3, wat onmogelijk is. Bijgevolg is m deelbaar door 3, en is $m+1$ een volkomen kwadraat.

   Met deze kennis bekijken we

$$x = 2 + 2\sqrt{1 + 12n^2} = 2 + 2(2m + 1) = 4m + 4 = 2^2(m + 1)$$

   Omdat $m + 1$ een volkomen kwadraat is, is x dat ook, zoals te bewijzen was.

5. *De meeste deelnemers kwamen dan niet verder dan het feit dat twee* opeenvolgende *getallen in A relatief priem zijn. Dat impliceert natuurlijk nog niet dat alle elementen van A onderling relatief priem zijn, wat zelfs helemaal niet waar is. Om wel tot een goede verzameling B te komen, moet men de elementen kiezen met behulp van de kleine stelling van Fermat, waarmee onze Beloften waarschijnlijk nog niet zo vertrouwd zijn.*

   We construëren een (oneindige) rij van verschillende natuurlijke getallen $a_0, a_1, a_2, \cdots$, elk groter dan 2, zodat voor $i \neq j$ steeds geldt dat $2^{a_i} - 3$ en $2^{a_j} - 3$ relatief priem zijn.

   Kies $a_0 = 3$. Stel vervolgens dat we $a_0, a_1, \cdots, a_n$ reeds gedefinieerd hebben. Zij $p_0, p_1, \cdots, p_m$ alle priemdelers van $2^{a_i} - 3$ voor $i = 0 \cdots n$. Definieer

$$a_{n+1} = (p_0 - 1)(p_1 - 1) \cdots (p_m - 1)$$

   We beweren dat $2^{a_{n+1}} - 3$ relatief priem is met $2^{a_k} - 3$ voor $0 \leq k \leq n$. Stel immers uit het ongerijmde dat voor een bepaalde i, p_i een priemfactor van $2^{a_{n+1}} - 3$. Volgens de kleine stelling van Fermat is $2^{p_i - 1} \equiv 1 \mod p_i$ en dus $2^{a_{n+1}} \equiv 1 \mod p_i$. Bijgevolg is p_i een deler van zowel $2^{a_{n+1}} - 1$ als $2^{a_{n+1}} - 3$. Dit kan enkel als $p_i = 2$, maar duidelijk is $2^{a_{n+1}} - 3$ oneven en dus niet deelbaar door 2. We bekomen een contradictie.

   Hierbij merken we nog op dat $2^{a_0} - 3 = 5$, en bijgevolg $a_i \geq 4$ voor alle $i > 0$. Bijgevolg is ook $2^{a_i} - 3 > 1$, zodat het relatief priem zijn van $2^{a_j} - 3$ en $2^{a_k} - 3$ ook impliceert dat de twee getallen verschillend zijn. (In tegenstelling tot het getal 1 dat relatief priem is met zichzelf.)

   De verzameling $B = \{2^{a_i} - 3 \mid i \in \mathbb{N}\}$ is bijgevolg een oneindige deelverzameling van A waarvan per constructie elke twee elementen relatief priem zijn.