**Beloftencompetitie**
Januari 2007

1. Beschouw een convexe vierhoek $ABCD$. Zijn $M, N$ de punten op $AB$ zodat $AM = MN = NB$. Zij $P, Q$ de punten op $CD$ zodat $CP = PQ = QD$. Bewijs dat

$$\text{Opp. } ABCD = 3 \cdot \text{Opp. } AMCP = 3 \cdot \text{Opp. } MNPQ$$

2. Zij $p, r, i$ natuurlijke getallen, met $p$ priem en $0 < i < p^r$. Bewijs dat $\binom{p^r}{i}$ deelbaar is door $p$.

   $\binom{n}{i}$ *is het aantal verschillende deelverzamelingen met* $i$ *elementen die je kan kiezen uit een verzameling met* $n$ *elementen.*

3. Bewijs dat er geen positieve reële getallen $a, b, c, d$ bestaan zodat de ongelijkheden

$$a + b < c + d$$

$$(a + b)(c + d) < ab + cd$$

$$(a + b)cd < ab(c + d)$$

   alledrie waar zijn.

4. Zij $n$ een natuurlijk getal zodat ook $x = 2 + 2\sqrt{1 + 12n^2}$ natuurlijk is. Bewijs dat $x$ een volkomen kwadraat is.

5. Bekijk de verzameling $A = \{2^{k+2} - 3 \mid k \in \mathbb{N}\}$. Bewijs dat $A$ een oneindige deelverzameling $B$ heeft, zodat alle elementen uit $B$ relatief priem zijn. (Met andere woorden, de grootste gemene deler van elke twee elementen van $B$ is 1.)