

Beloftencompetitie
Oplossingen september 2006

1. *De eerste vraag was geen echt wiskundig bewijs, maar vooral wat puzzelwerk. Het zoeken kon wel aanzienlijk eenvoudiger gemaakt worden, door even wiskundig naar het probleem te kijken, en zo op de vergelijking in natuurlijke getallen $a^2 + b^2 + c^2 = z^2$ te komen.*

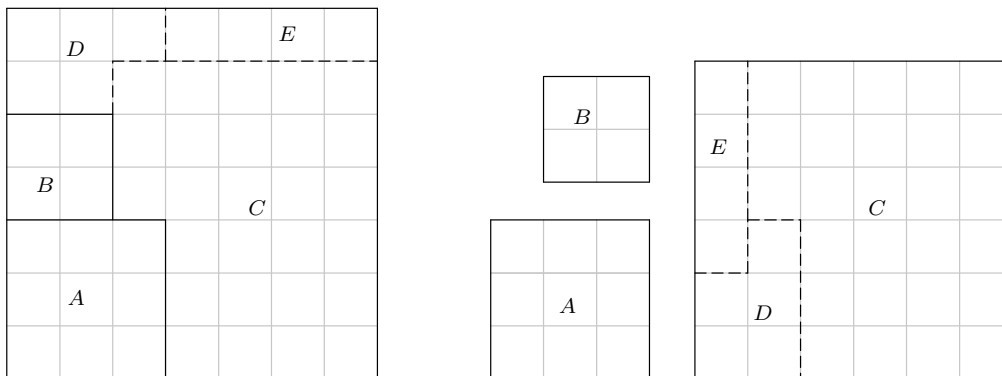
Om de zaken niet te moeilijk te maken, hopen we een verdeling te vinden, waarbij de lengtes van de zijde van de drie nieuwe vierkanten (zeg a , b en c), een rationale verhouding hebben tot de lengte z van de zijde van het oorspronkelijke vierkant. Bestaat een dergelijke verdeling, dan kunnen we de eenheid zo kiezen zodat z , a , b en c natuurlijke getallen zijn met

$$a^2 + b^2 + c^2 = z^2$$

Het is eenvoudig (onder andere door zonder verlies van algemeenheid te stellen dat $0 < a < b < c$) na te gaan dat deze gelijkheid geen oplossingen heeft voor $z < 7$, maar dat

$$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$$

We hopen nu een vierkant met zijde 7 te kunnen verdelen in vijf stukken, zodat er drie nieuwe vierkantjes met zijden 2, 3 en 6 ontstaan. Na wat proberen vinden we dat dit inderdaad mogelijk is, bijvoorbeeld op de volgende manier.



2. *Eens het probleem is opgesplitst in vier gevallen, is er nog slechts standaard rekenwerk met hoeken nodig. Natuurlijk mag men wel niet vergeten alle vier gevallen te behandelen.*

De snijpunten van de trisectrices van hoek A met BC noemen we D en E , waarbij E het dichtst bij punt C ligt. De snijpunten van de trisectrices van hoek B met AC noemen we F en G , waarbij G het dichtst bij punt C ligt.

Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ABC noemen we O . Omdat OA , OB en OC stalen zijn van de omgeschreven cirkels, zijn ze gelijk, en geldt bijgevolg dat

$$\angle OAB = \angle OBA$$

$$\angle OBC = \angle OCB$$

$$\angle OCA = \angle OAC$$

Wegens de definitie van trisectrice geldt ook dat

$$\angle BAD = \angle DAE = \angle EAC$$

$$\angle ABF = \angle FBG = \angle GBC$$

We schrijven $x = \angle DAB$. We onderscheiden nu verschillende mogelijkheden.

- O is het snijpunt van AE en BG . De som van de hoeken van driehoek ABC is 180° en eenvoudig gebruik van de bovenstaande ongelijkheden levert dat

$$180^\circ = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 3x + 3x + 2x = 8x$$

en verder

$$\angle ABF = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = 180^\circ - x - 3x = 90^\circ$$

zodat BF een hoogtelijn is. Analoog is ook AD een hoogtelijn. Het snijpunt van de *andere* trisectices BF en AD is dus inderdaad het hoogtepunt.

- O is het snijpunt van AD en BF . Analoog aan het vorig geval krijgen we dat

$$180^\circ = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 3x + 3x + 4x = 10x$$

en verder

$$\angle ABG = 180^\circ - \angle ABC - \angle CAB = 180^\circ - 2x - 3x = 90^\circ$$

zodat BG een hoogtelijn is. Analoog is ook AE een hoogtelijn. Het snijpunt van de *andere* trisectices BG en AE is dus inderdaad het hoogtepunt.

- O is het snijpunt van AE en BF . Via

$$180^\circ = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 3x + 6x + 5x = 14x$$

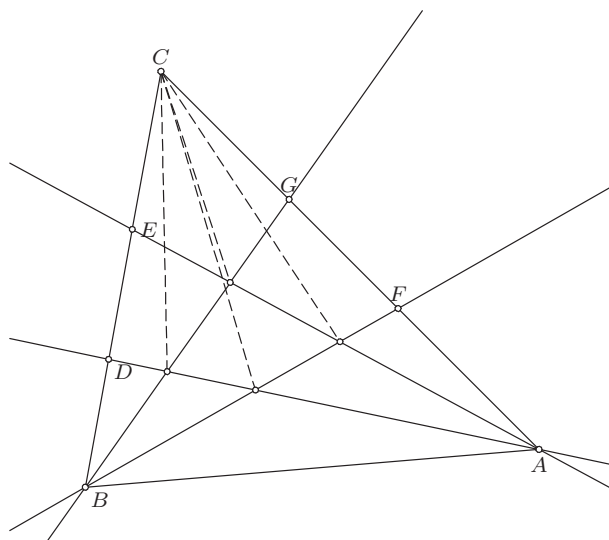
kunnen we opnieuw analoog bewijzen dat het snijpunt van de *andere* trisectices AD en BG het hoogtepunt is.

- O is het snijpunt van AD en BG . Via

$$180^\circ = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 3x + \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}x = 7x$$

kunnen we opnieuw analoog bewijzen dat het snijpunt van de *andere* trisectices AE en BF het hoogtepunt is.

Het te bewijzen is dus waar in alle mogelijke gevallen.



3. *Rechtstreeks het aantal goede puntendrietallen tellen, werkt hier niet goed. Door echter het gemiddelde aantal goede puntendrietallen over alle posities van de 16-hoeken te tellen, en te zien dat er zeker een positie is met minstens dat gemiddelde, kom je er echter wel vrij eenvoudig. We zetten, zonder verlies van algemeenheid, de binnenste 16-hoek vast in een bepaalde positie.*

We kunnen de twee buitense 16-hoeken nu, onafhankelijk van elkaar, rond het middelpunt roteren, en zo 16^2 verschillende configuraties bekomen.

Om een goed puntendrietal te kiezen, kunnen we 16 punten op de binnenste 16-hoek kiezen. Voor elk van deze 16 punten, zijn er 8 punten van dezelfde kleur op de middelste, en 8 punten op de buitenste 16-hoek die we kunnen kiezen om het goed puntendrietal te vervolledigen. Er zijn dus in totaal $16 \cdot 8 \cdot 8$ goede puntendrietalen mogelijk.

In alle 16^2 configuraties komt elk goed puntendrietal juist één keer voor. Er zijn dus gemiddeld 4 goede puntendrietalen per configuratie. Er is bijgevolg zeker een positie van de 16-hoeken met ten minste 4 goede puntendrietalen, zoals gevraagd was.

4. *De steutel tot de oplossing van de vierde vraag is de ontbinding van $x^q + y^q$ voor q oneven. De rest van het bewijs vloeit voort uit een beetje modulorekenen en het behandelen van twee speciale gevallen, $p = 2$ en $p = 5$.*

Als $p = 2$ dan is $2^p + 3^p = 13$, wat priem is, zodat noodzakelijk $a = 13$ en $n = 1$.

Als $p = 5$ dan is $2^p + 3^p = 275 = 5^2 \cdot 11 = a^n$. Bijgevolg is het priemgetal 11 een deler van a , dus 11^n moet een deler zijn van $a^n = 5^2 \cdot 11$, wat enkel kan als $n = 1$.

Als p een priemgetal verschillend van 2 en 5 is, is p zeker oneven. Bijgevolg kunnen we $2^p + 3^p$ ontbinden als

$$(2 + 3)(2^{p-1} - 2^{p-2}3 + 2^{p-3}3^2 - \dots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1})$$

$2^p + 3^p$ is dus zeker deelbaar door $(2 + 3) = 5$. Bekijken we echter de andere factor modulo 5 (dus alle termen op een veelvoud van vijf na), dan is

$$\begin{aligned} & 2^{p-1} - 2^{p-2}3 + 2^{p-3}3^2 - \dots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1} \\ \equiv & 2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot (-2) + 2^{p-3} \cdot (-2)^2 - \dots - 2 \cdot (-2)^{p-2} + (-2)^{p-1} \\ \equiv & p \cdot 2^{p-1} \end{aligned}$$

Omdat noch p noch 2^{p-1} een veelvoud van 5 is, is de factor

$$2^{p-1} - 2^{p-2}3 + 2^{p-3}3^2 - \dots - 2 \cdot 3^{p-2} + 3^{p-1}$$

niet deelbaar door 5. Bijgevolg is $2^p + 3^p$ deelbaar door 5 maar niet door 25. Ook a moet dan deelbaar zijn door 5, zodat 5^n een deler is van a^n . Maar als $n > 1$ is dan ook $5^2 = 25$ een deler van $a^n = 2^p + 3^p$, wat in tegenspraak is met het voorgaande. Ook nu moet dus $n = 1$.

5. *De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz is noodzakelijke kennis om deze vraag op te lossen. Maar zelfs voor die met Cauchy-Schwarz vertrouwd is, zal heel wat moeite hebben om het probleem volledig op te lossen en alle gevallen correct te behandelen.*

Stel dat bepaalde r_1, r_2, \dots, r_n aan de vraag voldoen.

Kies $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \dots = \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$. Dan moet

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \geq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \quad (1)$$

Als echter $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 < 1$ dan geldt volgens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz dat

$$\begin{aligned} r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n & \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \\ & < \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \end{aligned}$$

waarbij de laatste ongelijkheid strikt is omdat niet alle a_i nul zijn, dus $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} > 0$. Deze ongelijkheid is in tegenspraak is met het voorgaande. Er geldt dus $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \geq 1$.

Kies $\mathbf{x}_i = r_i$ voor $i = 1 \dots n$. Dan moet

$$r_1(r_1 - a_1) + r_2(r_2 - a_2) + \dots + r_n(r_n - a_n) \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Als echter $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 > 1$ dan geldt volgens de ongelijkheid van Cauchy-Schwarz nog steeds dat

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

en dus

$$\begin{aligned} & r_1(r_1 - a_1) + r_2(r_2 - a_2) + \dots + r_n(r_n - a_n) \\ = & \left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \right)^2 - (r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n) \\ \geq & \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \left(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \right) \\ \geq & \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \end{aligned}$$

Opdat bovenstaande ongelijkheden gelijkheden zouden zijn, moet enerzijds

$$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} = 0$$

en anderzijds volgens Cauchy-Schwarz

$$\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2} = \dots = \frac{r_n}{a_n}$$

Dit kan enkel als $(r_1, r_2, \dots, r_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Dan volgt uit de eerder bekomen ongelijkheid

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \geq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

echter dat $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \leq 1$, wat in tegenspraak is met onze veronderstelling.

De ongelijkheid

$$r_1(r_1 - a_1) + r_2(r_2 - a_2) + \dots + r_n(r_n - a_n) > \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

is dus strikt, wat in tegenspraak is met het gevraagde. Er geldt dus $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 \leq 1$.

Samengevoegd moet dus zeker $r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = 1$. Bovendien moet de ongelijkheid

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \leq \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

een gelijkheid zijn om een tegenspraak met (1) te vermijden. De ongelijkheid van Cauchy-Schwarz geeft enkel gelijkheid als

$$\frac{r_1}{a_1} = \frac{r_2}{a_2} = \dots = \frac{r_n}{a_n} = c \in \mathbb{R}$$

Bijgevolg is ook

$$r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_n^2 = c^2 (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) = 1$$

Dus

$$c = \frac{\pm 1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}}$$

Als c echter negatief is, hebben r_i en a_i steeds een verschillend teken. Bijgevolg is

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n < 0$$

wat in tegenspraak is met de eerder bekomen ongelijkheid

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_n a_n \geq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Bijgevolg is c positief, en is

$$r_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}}$$

voor alle $i = 1 \cdots n$.

Deze enige mogelijkheid is inderdaad een oplossing. Immers, voor alle x_1, x_2, \dots, x_n geldt nu, opnieuw via Cauchy-Schwarz, dat

$$\begin{aligned} & r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \cdots + r_n(x_n - a_n) \\ &= c(a_1(x_1 - a_1) + a_1(x_2 - a_2) + \cdots + a_1(x_n - a_n)) \\ &= c(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) - c(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \\ &\leq c\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} - c(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \\ &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \end{aligned}$$

zoals gevraagd was.