Beloftencompetitie
September 2006

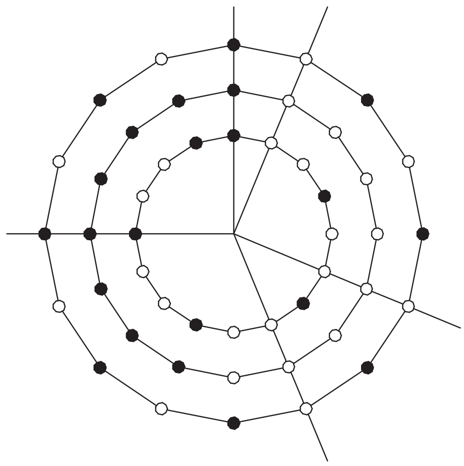
1. Geef een methode om een vierkant in vijf stukken te verdelen, zodat deze vijf stukken opnieuw kunnen samengevoegd worden (zonder overlappingen) tot drie vierkanten, waarvan er geen twee even groot zijn.

2. In een driehoek ABC snijden een trisectrice van de hoek A en een trisectrices van de hoek B elkaar in het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ABC. Bewijs dat de andere trisectrice van A en de andere trisectrice van B elkaar snijden in het hoogtepunt van ABC.

   (De twee *trisectrices* van een hoek, verdelen die hoek in drie gelijke delen.)

3. In elk van drie concentrische cirkels is een regelmatige 16-hoek ingeschreven. De hoekpunten van deze regelmatige 16-hoek worden ofwel zwart, ofwel wit gekleurd, waarbij op elke cirkel juist acht punten wit en acht punten zwart gekleurd worden.

   Wanneer drie punten met dezelfde kleur op eenzelfde halfrechte, met het middelpunt van de cirkels als eindpunt, liggen, noemen we dat een *goed puntendrietal*. Toon aan dat het steeds mogelijk is om, door de cirkels (apart van elkaar) rond het middelpunt te roteren, een situatie te bekomen met minstens vier goede puntendrietallen.



4. Voor natuurlijke getallen a, n, p, waarbij p priem is, geldt

$$2^p + 3^p = a^n$$

   Bewijs dat $n = 1$.

5. Gegeven is een natuurlijk getal n en reëele getallen $a_1, a_2, \cdots, a_n$, niet allen gelijk aan 0. Bepaal alle mogelijke reëele getallen $r_1, r_2, \cdots, r_n$, zodat

$$r_1(x_1 - a_1) + r_2(x_2 - a_2) + \cdots + r_n(x_n - a_n) \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

   voor alle reëele getallen $x_1, x_2, \cdots, x_n$.