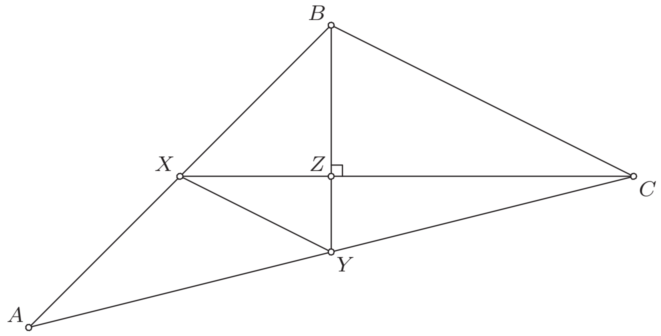
Beloftencompetitie: oplossingen
Augustus 2006

1. *De eerste vraag was een meetkundevraag, waarbij het volstond om alle gegevens goed in rekening te brengen en een aantal keer de stelling van Pythagoras toe te passen. De meeste inzendingen gebruikten het feit dat het zwaartepunt elke zwaartelijn verdeelt in lijnstukken die zich verhouden als 2:1, in plaats van het feit dat* $2|XY| = |BC|$ *zoals in de modeloplossing.*



Noem de middens van AB en AC respectievelijk X en Y. De zwaartelijn uit C is dus CX en de zwaartelijk uit B is BY. Het zwaartepunt, het snijpunt van CX en BY, noemen we Z.

Omdat CX en BY elkaar loodrecht snijden in Z (en omdat Z tussen C en X en tussen B en Y ligt), geldt

$$\angle CZB = \angle BZX = \angle XZY = \angle YZC = 90^\circ$$

Bijgevolg kunnen we herhaaldelijk de stelling van Pythagoras toepassen:

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |BZ|^2 + |CZ|^2 \\ &= (|BX|^2 - |XZ|^2) + (|CY|^2 - |YZ|^2) \\ &= |BX|^2 + |CY|^2 - (|XZ|^2 + |YZ|^2) \\ &= |BX|^2 + |CY|^2 - |XY|^2 \end{aligned}$$

Door onze definitie van X en Y, is $2|BX| = |AB|$ en $2|CY| = |AC|$. Ook is $|XY|$, als afstand tussen de middens van AB en AC, juist de helft van $|BC|$. (Dit valt bijvoorbeeld in te zien door het feit dat de driehoeken AXY en ABC gelijkvormig zijn, met gelijkvormigheidsfactor 2.) Passen we deze gegevens toe in de vorige gelijkheid, bekomen we

$$|BC|^2 = \frac{|AB|^2}{4} + \frac{|AC|^2}{4} - \frac{|BC|^2}{4}$$

$$5|BC|^2 = |AB|^2 + |AC|^2$$

Zoals te bewijzen was.

2. *De tweede vraag is een typische getaltheorievraag, waarbij verschillende observaties samen tot een volledige oplossing leiden. De meeste deelnemers herschreven eerst de gegeven vergelijking tot*

$$a!\left(1 + \frac{b!}{a!}\right) = 2^n$$

en werkten daarmee verder. Dit is handig om tot de goede ideeën te komen, maar niet echt noodzakelijk voor een bewijs, zoals de onderstaande modeloplossing toont.

Als $a \geq 3$, dan is ook $b \geq 3$. Bijgevolg is $a! + b!$ deelbaar door 3, waardoor 2^n ook deelbaar door 3 moet zijn wat absurd is. Er geldt dus $a = 1$ of $a = 2$.

- Stel $\mathbf{a = 1}$, dus $a! = 1$. Omdat 2^n even is, moet ook $1 + b!$ even zijn, en dus moet $b!$ oneven zijn. De enige faculteit die oneven is, is echter $1!$. Bijgevolg moet $\mathbf{b = 1}$. Dit levert $1! + 1! = 2^1$, een oplossing.
- Stel $\mathbf{a = 2}$, dus $a! = 2$. Als $b \geq 4$, dan is $a! + b! \geq 2 + 4! = 26 > 2^4$ dus $n > 4$. In dit geval zijn dus zowel $b!$ en 2^n deelbaar door 4. Dit is echter in tegenspraak met het feit dat $b!$ en 2^n maar $a! = 2$ van elkaar verschillen. Er moet dus gelden $b = 2$ of $b = 3$. Omdat $2! + 2! = 2^2$ en $2! + 3! = 2^3$ zijn dit ook twee oplossingen.

3. *De volgende vraag is boeiend, omdat hij enkele ideeën uit de algebra (Hoofdstelling van de Algebra, ongelijkheid tussen rekenkundig en meetkundig gemiddelde) combineert tot een verrassend resultaat.*

   Een veelterm van graad n, met n nulpunten $x_1, \cdots, x_n$ en met coëfficiënt 1 bij de term x^n, kan ontbonden worden als

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$$

(Een eenvoudig geval van de Hoofdstelling van de Algebra.) Bijgevolg geldt duidelijk

$$f(0) = (-x_1)(-x_2) \cdots (-x_n)$$

en dus

$$|f(0)| = x_1 x_2 \ldots x_n$$

Ook is

$$f(1) = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)$$

Er is gegeven dat $|f(0)| = f(1)$, bijgevolg is

$$x_1 x_2 \cdots x_n = (1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n) \tag{1}$$

Voor alle i is $0 < x_i < 1$, dus zowel x_i als $1 - x_i$ zijn positief. We kunnen dus de vierkantswortel van deze termen nemen. Omdat kwadraten positief zijn, is

$$0 \leq (\sqrt{x_i} - \sqrt{1 - x_i})^2 = x_i - 2\sqrt{x_i(1 - x_i)} + (1 - x_i)$$

dus

$$\sqrt{x_i(1 - x_i)} \leq \frac{1}{2}$$

(We passen hier eigenlijk een eenvoudig geval van de ongelijkheid tussen rekenkundig en meetkundig gemiddelde toe.) Het product nemen over $i = 1, \cdots, n$ geeft

$$\sqrt{(x_1 x_2 \cdots x_n)\left((1 - x_1)(1 - x_2) \cdots (1 - x_n)\right)} \leq \frac{1}{2^n}$$

Wegens de gelijkheid (1) kunnen we het linkerlid vereenvoudigen tot

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \frac{1}{2^n}$$

Gelijkheid doet zich enkel voor als

$$\sqrt{x_i(1 - x_i)} = \frac{1}{2}$$

en dus

$$x_i = \frac{1}{2}$$

voor elke i, wat in tegenspraak is met het feit dat alle x_i verschillend zijn. Bijgevolg is de ongelijkheid

$$x_1 x_2 \cdots x_n < \frac{1}{2^n}$$

strikt, zoals te bewijzen was.

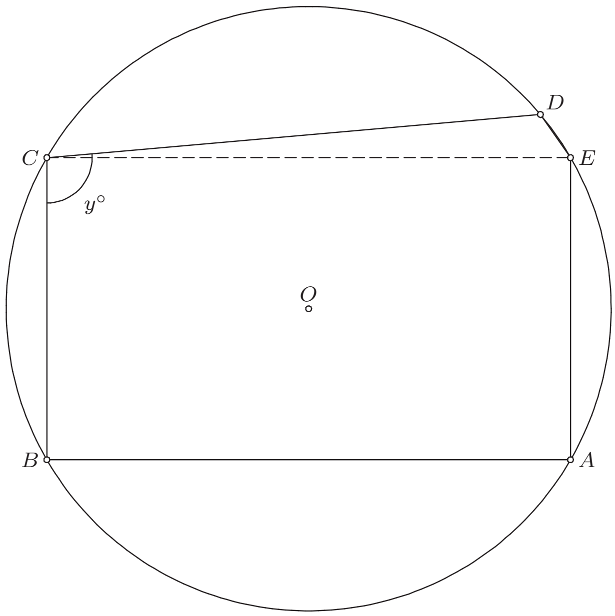
4. *Hoewel alle deelnemers deel a) van de vierde vraag konden oplossen, leverde Mats Vermeeren de enige correcte oplossing van deel b). Frank Feys maakte de interessante observatie dat*

$$\angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D \leq \angle E$$

equivalent is met

$$\widehat{AB} \geq \widehat{CD} \geq \widehat{EA} \geq \widehat{BC} \geq \widehat{DE}$$

waarbij we met $\widehat{AB}$ de grootte van de cirkelboog bepaald door A en B bedoelen.



Voor de eenvoud noteren we $\angle EAB = \angle A$, $\angle ABC = \angle B$, $\angle BCD = \angle C$, $\angle CDE = \angle D$, $\angle DEA = \angle E$.

(a) $ABCE$ is een koordenvierhoek, waarbij overstaande hoeken supplementair zijn:

$$180° = \angle BCE + \angle A$$

Ook is

$$0° < \angle ECD$$

dus

$$180° < \angle BCE + \angle ECD + \angle A = \angle C + \angle A$$

Bovendien is gegeven dat

$$\angle A \leq \angle C$$

dus

$$180° < \angle C + \angle A \leq 2\angle C$$

en na deling door 2

$$90° < \angle C$$

zoals te bewijzen was.

(b) Kies een reëel getal x groter dan 90. We tonen aan dat er steeds een vijfhoek bestaat die aan de voorwaarden voldoet, en waarvoor $\angle C \leq x^\circ$.

Noem het middelpunt van de cirkel O. Construeer een rechthoek $ABCE$ ingeschreven in de cirkel, waarvoor $\angle EOA = 60^\circ$, en bijgevolg $\angle BOC = 60^\circ$ en $\angle AOB = \angle COE = 120^\circ$. Definieer

$$y = \min\{x, 120\}$$

Er is een punt D op de cirkelboog $\widehat{CE}$ waarvoor $\angle C = y^\circ$. We stellen dat deze vijfhoek $ABCDE$ aan de voorwaarden voldoet. Immers:

$$90^\circ < \angle C \leq 120^\circ$$

Ook geldt

$$\angle A = \angle B = 90^\circ$$

Verder is de grootte van de omtrekshoek $\angle D$ de helft van de cirkelboog

$$\widehat{EC} = 360^\circ - \angle COE = 240^\circ$$

waarop deze omtrekshoek staat, dus

$$\angle D = 120^\circ$$

Ten slotte is de som van de hoeken van een convexe vijfhoek gelijk aan 540°, wat geeft dat

$$\angle E = 540^\circ - \angle A - \angle B - \angle C - \angle D$$

Bijgevolg

$$120^\circ \leq \angle E < 150^\circ$$

Er geldt dus inderdaad

$$\angle A \leq \angle B \leq \angle C \leq \angle D \leq \angle E$$

en bovendien $\angle C = \min\{x, 120\}^\circ \leq x^\circ$.

5. *De laatste vraag van augustus was een combinatoriekvraag. Als je zelf wat tekeningen probeert te maken, merk je al snel dat het aantal mogelijkheden voor T beperkt is. De grootste moeilijkheid was waarschijnlijk echter het goed opschrijven van de oplossing, in duidelijke en correcte bewoordingen. Enkel Mats Vermeeren stuurde een bewijs in voor dit probleem.*
Merk overigens op dat het feit dat de n punten een regelmatige n-hoek vormen, geen belang heeft voor de oplossing.

We noemen twee driehoeken $a, b \in T$ *verwant*, als er een rij $t_1, t_2, \cdots, t_n$ van driehoeken uit T bestaat, zodat a en t_1 twee hoekpunten gemeenschappelijk hebben, t_1 en t_2 twee hoekpunten gemeenschappelijk hebben, $\cdots$ en t_n en b twee hoekpunten gemeenschappelijk hebben. Een verzameling van onderling verwante driehoeken uit T noemen we een *familie*. Het is duidelijk dat T zo wordt verdeeld in families, waarbij driehoeken uit verschillende families nooit een hoekpunt gemeenschappelijk hebben.

We bewijzen dat elke familie steeds minstens zoveel hoekpunten bevat als driehoeken, met enkel gelijkheid mogelijk als de familie 4 hoekpunten bevat. Dit is onze **hypothese**.

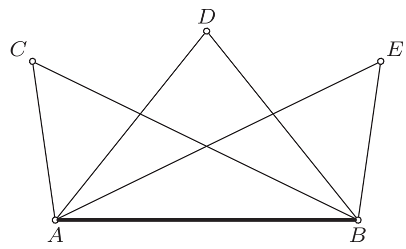
We bewijzen eerst het **lemma** dat twee driehoeken uit eenzelfde familie steeds twee hoekpunten gemeenschappelijk hebben. Het volstaat daarvoor om te bewijzen dat als $a, b, c \in T$, waarbij a en b twee hoekpunten gemeenschappelijk hebben en b en c ook, dat dan a en c ook twee hoekpunten gemeenschappelijk hebben. Omdat b slechts drie hoekpunten heeft, is er zeker een hoekpunt van b dat a en c gemeenschappelijk hebben. Uit de voorwaarden van T halen we dat dan a en c juist twee hoekpunten gemeenschappelijk hebben. Het lemma is een eenvoudige veralgemening hiervan.

Neem nu een willekeurige familie uit T, die een driehoek ABC bevat. Als geen enkele driehoek uit T hoekpunten gemeenschappelijk heeft met ABC, is ABC de enige driehoek in de familie is en klopt onze hypothese zeker. Neem daarom aan dat er een driehoek twee hoekpunten gemeenschappelijk heeft met ABC, en veronderstel zonder verlies van algemeenheid dat dit de punten A en B zijn. Noem deze tweede driehoek ABD. Als er geen andere driehoek uit T in de familie zit, hebben we twee driehoeken en vier hoekpunten, en klopt de hypothese. Neem daarom aan dat er nog een derde driehoek twee hoekpunten gemeenschappelijk heeft met ABC en ABD. We onderscheiden twee gevallen:

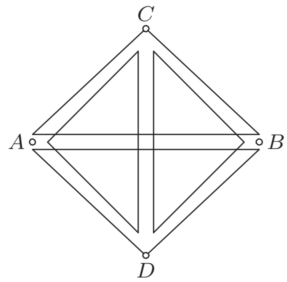
- Een derde driehoek bevat ook de hoekpunten A en B, en een derde hoekpunt E.

  Elke driehoek die nog lid is van de familie, moet nu ook de hoekpunten A en B bevatten. Bevat een driehoek t uit T immers wel het hoekpunt A, maar niet B, dan moet t zowel C, D als E als hoekpunt hebben om twee hoekpunten gemeenschappelijk te hebben met elke driehoek uit de familie. Dit is duidelijk een contradictie omdat een driehoek maar drie hoekpunten heeft. Het geval dat t wel B als hoekpunt heeft, maar niet A, is volledig analoog.

  We krijgen hier de situatie waarbij een familie willekeurig veel (zeg n) driehoeken bevat, alle driehoeken twee punten A en B gemeenschappelijk hebben, en elk nog een verschillend derde hoekpunt heeft. De familie bevat dus n driehoeken en $n + 2$ hoekpunten, zodat de hypothese klopt voor deze familie, en gelijkheid nooit mogelijk is.



- Geen andere driehoek bevat zowel A als B. Omdat een andere driehoek in de familie twee hoekpunten gemeenschappelijk moet hebben met ABC en ABD moet de andere driehoek zowel C als D als hoekpunt hebben. Er zijn dan nog twee mogelijke driehoeken die in de familie kunnen zitten: ACD en BCD. Zit een van beide driehoeken in de familie, krijgen we een familie met vier hoekpunten en drie driehoeken. Ook met zowel ACD als BCD krijgen we een geldige familie, met vier hoekpunten en vier driehoeken. De hypothese geldt dus ook hier steeds, en gelijkheid is enkel mogelijk als de familie vier hoekpunten bevat.



Onze hypothese is dus waarin alle gevallen. We besluiten hieruit dat het aantal driehoeken in T steeds kleiner of gelijk aan het aantal punten n is. Gelijkheid is enkel mogelijk als de n hoekpunten kunnen opgesplitst worden in families van vier hoekpunten, dus als n een veelvoud van 4 is.