

Beloftencompetitie

Augustus 2006

1. In een driehoek ABC staan de zwaartelijnen uit B en C loodrecht op elkaar. Bewijs dat

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 5 |BC|^2$$

2. Bepaal alle strikt positieve natuurlijke getallen a, b, n waarvoor $a \leq b$ en

$$2^n = a! + b!$$

3. Zij n een natuurlijk getal groter dan 1. Beschouw een reële veeltermfunctie

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

waarbij a_0, \dots, a_{n-1} reële getallen zijn. Er is geweten dat

- f heeft n verschillende reële nulpunten: x_1, x_2, \dots, x_n .
- $0 < x_i < 1$ voor $i = 1, \dots, n$.
- $|f(0)| = f(1)$.

Bewijs dat

$$x_1 x_2 \cdots x_n < \frac{1}{2^n}$$

4. Een (convexe) vijfhoek $ABCDE$ is ingeschreven in een cirkel. Er geldt

$$\angle EAB \leq \angle ABC \leq \angle BCD \leq \angle CDE \leq \angle DEA$$

- (a) Bewijs dat $\angle BCD > 90^\circ$.
(b) Bewijs dat er geen reëel getal $x > 90$ bestaat, zodat steeds $\angle BCD > x^\circ$.
5. Gegeven is een regelmatige n -hoek. T is een verzameling driehoeken, waarbij

- De hoekpunten van elke driehoek uit T , zijn allen ook hoekpunten van de n -hoek.
- Elk paar driehoeken uit T heeft ofwel 0, ofwel 2 hoekpunten gemeenschappelijk.

Bewijs dat het aantal driehoeken in T kleiner of gelijk aan n is, en bepaal alle n waarvoor gelijkheid mogelijk is.