

Beloftencompetitie: oplossingen

Juli 2006

1. Een eenvoudige opwarmer. Eens het probleem in een vergelijking omgezet is, kan men alle mogelijkheden afgaan, en steeds een tegenspraak bekomen. De handige ontbinding

$$ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$$

biedt echter een snellere en mooiere oplossing.

Stel uit het ongerijmde dat de verzameling $\{1, 2, \dots, 15\}$ wel kan opgesplitst worden in een verzameling $X = \{a, b\}$ (met $a \neq b$) en een verzameling $Y = \{1, 2, \dots, 15\} \setminus \{a, b\}$, zodat het product van de elementen uit X gelijk is aan de som van de elementen uit Y . Dan moet dus gelden dat

$$a \cdot b = 1 + 2 + \dots + 15 - a - b = \frac{15 \cdot 16}{2} - a - b = 120 - a - b$$

en bijgevolg

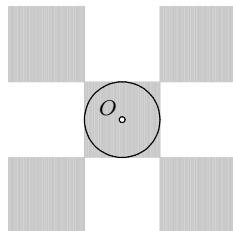
$$(a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1 = 121$$

Omdat $a \in \{1, 2, \dots, 15\}$, is $2 \leq a + 1 \leq 16$. $a + 1$ moet echter een deler zijn van $121 = 11^2$, zodat $a = 10$. Opdat $(a + 1)(b + 1) = 121$, moet echter ook $b = 10$, wat in tegenspraak is met de voorwaarde $a \neq b$.

De aanname dat er een opsplitsing zoals in de vraag bestaat, is dus fout.

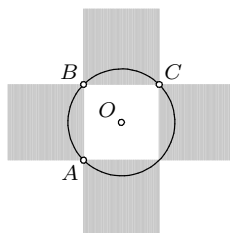
2. Beide deelnemers vonden de correcte waarde $\sqrt{10}$, maar een bewijs geven dat alle mogelijkheden sluitend behandelt, was niet zo evident. Onderstaande modeloplossing werd in grote lijnen gegeven door Mats Vermeeren.

Als een cirkel maar op één zwart vakje ligt, is de straal van die cirkel duidelijk maximaal 1.

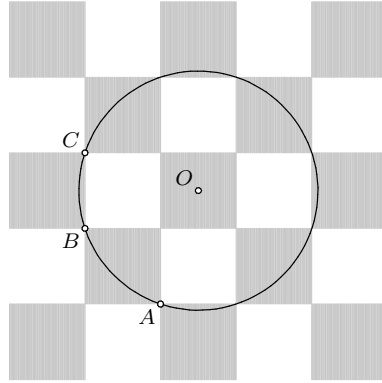


Een cirkel die op meerdere zwarte vakjes ligt, gaat duidelijk door twee hoekpunten van elk zwart vakje dat het doorkruist. We onderscheiden nu twee gevallen:

- De cirkel gaat nergens door twee overstaande hoekpunten van een zwart vakje. Neem nu een willekeurig zwart vakje waar de cirkel op ligt, en noem de twee aangrenzende hoekpunten waardoor de cirkel gaat A en B . Op het andere zwarte vakje dat aan B grenst, noemen we het tweede hoekpunt waardoor de cirkel gaat C . Het is eenvoudig na te gaan dat A , B en C steeds een cirkel bepalen die volledig op zwarte vakjes ligt en (met de Stelling van Pythagoras) als straal $\sqrt{2}$ heeft.

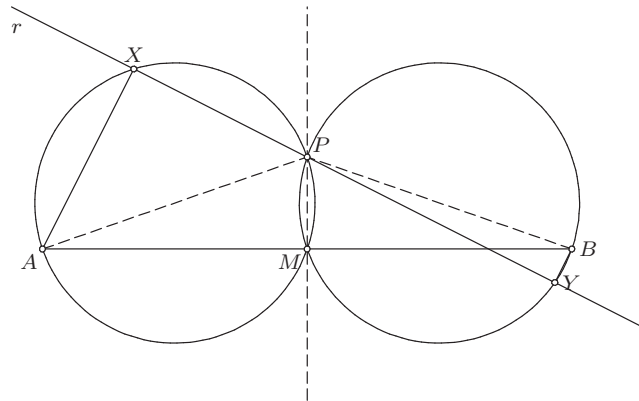


- De cirkel gaat op een bepaald zwart vakje door twee overstaande hoekpunten, A en B . Beschouw in het andere zwarte vakje dat aan B grenst het tweede hoekpunt dat de cirkel bevat. Noem dit punt C . C kan niet het overstaand hoekpunt van B zijn, want dan zou de cirkel drie colineaire punten bevatten, wat onmogelijk is. Bijgevolg moet C een aangrenzend hoekpunt zijn van B . Het is nu eenvoudig na te gaan dat A , B en C steeds een cirkel bepalen die volledig op zwarte vakjes ligt en (met de Stelling van Pythagoras) als straal $\sqrt{10}$ heeft.



We hebben nu alle mogelijkheden voor een cirkel die volledig op zwarte vakjes ligt, behandeld. Omdat $1 < \sqrt{2} < \sqrt{10}$, is de maximale straal van een dergelijke cirkel $\sqrt{10}$.

3. *Het derde probleem was een meetkundevraag, die op verschillende manieren opgelost kan worden. De constructie van het punt P is de sleutel tot de onderstaande elegante modeloplossing, gegeven door Frank Feys.*



Zij P het snijpunt van r met de rechte door M loodrecht op AB . Omdat $\angle AMP = \angle AXP = 90^\circ$, is $AMXP$ een koordenvierhoek. Bovendien staat een omtrekshoek van 90° steeds op een middellijn van de cirkel, dus AP is een middellijn van de omgeschreven cirkel van AMX . Analoog is BP een middellijn van de omgeschreven cirkel van BMY .

Om te bewijzen dat de stralen van deze twee cirkels gelijk zijn, volstaat het nu om aan te tonen dat $|AP| = |BP|$. Omdat M het midden is van AB geldt $|AM| = |BM|$. Ook geldt $\angle AMP = \angle BMP = 90^\circ$. De driehoeken AMP en BMP zijn dus congruent, waaruit inderdaad volgt dat $|AP| = |BP|$.

4. *Het vierde probleem was een goede uitdaging om je kennis van getaltheorie en modulo-rekenen te testen. Voor één richting van de als en slechts als was er wel kennis van de Stelling van Bézout-Bachet nodig, een eenvoudige en belangrijke stelling die helaas nauwelijks gekend is bij de studenten uit het secundair onderwijs.*

Neem aan dat er een $x \in V$ bestaat waarvoor $f(x) = x$. Dan geldt dus $x = ax + b \pmod n$, of nog: $(a - 1)x + b = 0 \pmod n$. Bijgevolg is

$$(a - 1)x + b = kn$$

voor een $k \in \mathbb{Z}$. Uit deze gelijkheid volgt duidelijk dat elk getal dat zowel $a - 1$ als n deelt, ook een deler van b is. We hebben dus bewezen dat als er een $x \in V$ is waarvoor $f(x) = x$, dan is de grootste gemene deler van $a - 1$ en n een deler van b .

Neem nu omgekeerd aan dat $\text{ggd}(a - 1, n)$, een deler is van b . Volgens de stelling van B eout-Bachet kunnen we schrijven dat $\text{ggd}(a - 1, n) = l(a - 1) + mn$ voor bepaalde gehele getallen l en m . Omdat $l(a - 1) + mn$ een deler is van b , is

$$b = p(l(a - 1) + mn)$$

$$-pl = -pla + b + mn$$

voor een zeker geheel getal p . Definieer nu x als de rest van $-pl$ bij deling door n . (Bijgevolg is $x \in V$.) Dan geven $(-pla + b + mn)$ en $(ax + b)$ dezelfde rest bij deling door n . Deze rest is bovendien gelijk aan de rest van $-pl$ bij deling door n , die per definitie gelijk is aan x . Bijgevolg is

$$\begin{aligned} f(x) &= ax + b \pmod n \\ &= x \end{aligned}$$

Aangenomen dat $\text{ggd}(a - 1, n) \mid b$, is er dus steeds een $x \in V$ zodat $f(x) = x$.

5. *Dit probleem is een speciaal geval van de stelling dat een rij van $nm + 1$ verschillende getallen, steeds een dalende deelrij van n elementen of een stijgende deelrij van m elementen bevat. Een boeiende stelling, die een handig lemma kan zijn bij het oplossen van sommige andere problemen. Het is echter allesbehalve evident om zelf op de goede idee en voor het bewijs te komen. Met deel a) en de hint in deel b) hoopten wij de deelnemers op de goede weg te kunnen zetten, maar dat was ijdele hoop: helaas stuurde niemand een oplossing in.*

- (a) Beschouw de rij

$$\begin{aligned} &59, 59 - 1, 59 - 2, \dots, 59 - 58, \\ &2 \cdot 59, 2 \cdot 59 - 1, 2 \cdot 59 - 2, \dots, 2 \cdot 59 - 58, \\ &3 \cdot 59, 3 \cdot 59 - 1, 3 \cdot 59 - 2, \dots, 3 \cdot 59 - 58, \\ &\dots \\ &34 \cdot 59, 34 \cdot 59 - 1, 34 \cdot 59 - 3, \dots, 34 \cdot 59 - 58 \end{aligned}$$

Deze rij bevat 2006 verschillende getallen (alle getallen van 1 tot en met 2006). Na een willekeurig getal komen er nooit meer dan 58 kleinere getallen. Een dalende deelrij bevat dus maximaal 59 getallen.

Verdeel de rij nu denkbeeldig in 34 *dalende blokken* van 59 getallen. Binnen een blok zijn er geen twee getallen zodat het eerste kleiner is dan het tweede. Een stijgende deelrij kan dus maximaal  en getal uit elk van de 34 blokken bevatten en is bijgevolg maximaal 34 getallen lang.

Deze rij voldoet dus aan het gevraagde.

- (b) We korten *langste dalende deelrij* af als LDD.

We volgen de hint en bekijken van elk element van onze voorbeeldrij uit a) de lengte van de LDD die bij dat element begint. We vinden de lengtes

$$\begin{aligned} &59, 58, 57, \dots, 1 \\ &59, 58, 57, \dots, 1 \\ &59, 58, 57, \dots, 1 \\ &\dots \\ &59, 58, 57, \dots, 1 \end{aligned}$$

We merken dat elementen waarbij hetzelfde getal hoort, steeds een stijgende deelrij vormen. Dit feit bewijzen we zodadelijk formeel, en zal de sleutel tot het bewijs zijn.

Neem een willekeurige deelrij van 2007 verschillende getallen. Beschouw twee elementen a en b , waarbij a voor b komt in de rij, en waarbij de lengte van de LDD die bij a begint, gelijk is aan de lengte van de LDD die met b begint. Noem de LDD die met b begint R en stel dat R n elementen heeft. Als a groter is dan b , kunnen we a vooraan R bijvoegen, en zo een dalende deelrij van $n+1$ elementen bekomen die met a begint. Dit is in tegenspraak met het feit dat de LDD die met a begint n elementen heeft. Bijgevolg moet a kleiner zijn dan b . We kunnen hieruit besluiten dat elementen, waarvan de lengte van de LDD die bij elk element begint steeds gelijk is, samen een stijgende deelrij vormen.

Stel nu uit het dat een rij van 2007 elementen geen dalende deelrij van 60 elementen heeft. De lengte van de LDD die bij een element begint, kan dus 59 verschillende waarden aannemen: van 1 tot en met 59. Omdat $2007 = 59 \cdot 34 + 1$, zijn er wegens het duivenhokprincipe 35 elementen van de rij, waarvoor de lengte van de LDD die met elk element begint steeds gelijk is. Volgens de vorige paragraaf, vormen deze elementen een stijgende deelrij van 35 elementen.

Een rij van 2007 elementen bevat dus steeds een dalende deelrij van 60 elementen of een stijgende deelrij van 35 elementen.