

Beloftencompetitie

Juli 2006

1. Kan de verzameling $\{1, 2, 3, \dots, 14, 15\}$ worden verdeeld in een verzameling A van 2 elementen en een verzameling B van 13 elementen, zodat het product van de elementen van A gelijk is aan de som van de elementen van B .
2. Gegeven is een schaakbord, waarbij de zijde van een vakje lengte 2 heeft. Wat is de grootst mogelijke straal voor een cirkel die enkel op zwarte vakjes ligt? (Dus: geen enkel punt van de cirkelomtrek ligt binnen een wit vakje.)
3. A en B zijn twee punten in het vlak, en M is het midden van $[AB]$. Zij r een rechte, en zij X en Y de loodrechte projectie van respectievelijk A en B op r . Veronderstel dat A , X en M niet collineair zijn. Bewijs dat de omgeschreven cirkels van AMX en van $BM Y$ dezelfde straal hebben.
4. Neem een natuurlijk getal $n > 0$ en definieer een verzameling $V = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$. Neem $a, b \in V$ en definieer de functie f van V naar V door

$$f(x) = (ax + b) \pmod{n}$$

voor alle $x \in V$.

Bewijs dat er een $x \in V$ bestaat met $f(x) = x$, als en slechts als $\text{ggd}(a - 1, n)$ een deler is van b .

(Met $p \pmod{q}$ bedoelen we de rest van p bij deling door q . Met $\text{ggd}(p, q)$ bedoelen we de grootste gemene deler van p en q .)

5. Een deelrij van een rij, bevat een willekeurig aantal getallen uit de rij, in dezelfde volgorde als in de rij. Bijvoorbeeld: 2, 5, 3 is een deelrij van de rij 1, **2**, 4, **5**, **3**, 6.
 - (a) Geef een rij van 2006 verschillende getallen, die geen stijgende deelrij van 35 getallen heeft, en ook geen dalende deelrij van **60** getallen.
 - (b) Toon aan dat elk rij van 2007 verschillende getallen zeker een stijgende deelrij van 35 getallen of een dalende deelrij van **60** getallen heeft.

Hint: Bekijk in je voorbeeldrij voor a), voor elk element van de rij de lengte van de langste dalende deelrij die begint bij dat element.