

## Beloftencompetitie: oplossingen

Mei 2006

1. De eerste vraag bevatte een valstrik, waar de deelnemers gewillig in liepen. Het is verleidelijk om uit  $f(x)^2 = x^2$  voor alle  $x$  meteen te concluderen dat  $f(x) = x$  voor alle  $x$  of  $f(x) = -x$  voor alle  $x$ . Dit is echter ronduit fout, want bijvoorbeeld ook  $f : x \rightarrow |x|$  en vele andere functies ook voldoen aan  $f(x)^2 = x^2$  voor alle  $x$ . Om tot het juiste resultaat te komen, is dus een andere, correcte redenering nodig, zoals hieronder.

Stel  $x = y = 1$ . Dan krijgen we dat

$$f(1)^2 = 1^2$$

En dus

$$f(1) = 1 \text{ of } f(1) = -1$$

Stel nu  $y = 1$ . Dan krijgen we de voorwaarde dat

$$f(x) = \frac{x}{f(1)}$$

voor alle reële  $y$ .

Als  $f(1) = 1$ , dan moet dus  $f(x) = x$  voor alle  $x$ . Aangezien dan

$$f(x)f(y) = xy$$

voldoet deze functie aan de vraag. De andere mogelijkheid is dat  $f(1) = -1$ , en bijgevolg  $f(x) = -x$  voor alle  $x$ . Omdat dan

$$f(x)f(y) = (-x)(-y) = xy$$

voldoet ook deze tweede functie.

2. Het bewijs van de volgende meetkundestelling is vrij kort, maar het juist inzicht hebben is niet evident. In feite passen we hieronder drie keer de stelling van Thales toe, maar deze herformulering met gelijkvormige driehoeken levert waarschijnlijk een duidelijker inzicht in de oplossing.

Aangezien  $AE \parallel BC$  zijn de driehoeken  $AEP$  en  $CBP$  gelijkvormig en is

$$\frac{|AE|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|PC|} \quad (1)$$

Analoog zijn de driehoeken  $CFQ$  en  $ABP$  gelijkvormig en is

$$\frac{|CF|}{|AB|} = \frac{|CQ|}{|QA|} \quad (2)$$

Er is gegeven dat  $|AP| = |CQ|$  waaruit meteen ook volgt dat  $|PC| = |QA|$ . Bijgevolg zijn de verhoudingen (1) en (2) gelijk, en is

$$\frac{|AE|}{|BC|} = \frac{|CF|}{|AB|}$$

Overstaande zijde van een parallellogram zijn even lang, dus  $|BC| = |AD|$  en  $|AB| = |CD|$ . Dit geeft dat

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|CF|}{|CD|}$$

Bijgevolg zijn de driehoeken  $DEF$  en  $DAC$  gelijkvormig, en moeten  $EF$  en  $AC$  evenwijdig zijn.

3. *Tot onze verrassing vond niemand een correct bewijs voor de derde vraag, een leuke combinatorievraag. Spijtig, want er zijn een aantal verschillende oplossingen, die elk op zich zo interessant zijn dat we er maar liefst drie als modeloplossing geven.*

**Oplossing 1:** Beschouw een speler  $A$  die een maximaal, zeg  $n$ , aantal wedstrijden verloren heeft. Er is een speler  $B$  waarvan  $A$  gewonnen heeft. Als alle spelers die gewonnen hebben tegen  $A$ , ook gewonnen hebben van  $B$ , heeft  $B$  minstens  $n + 1$  wedstrijden verloren is, wat in tegenspraak is met de keuze van  $A$ . Er is dus een speler  $C$  die gewonnen heeft van  $A$  en verloren tegen  $B$ . De spelers  $A$ ,  $B$  en  $C$  voldoen aan het gevraagde.

**Oplossing 2:** Elk van de  $n$  spelers heeft minstens 1 en hoogstens  $n - 1$  wedstrijden gewonnen. Volgens het duivenhoekprincipe zijn er dus twee spelers  $A$  en  $B$  met evenveel gewonnen wedstrijden. Neem zonder verlies van algemeenheid aan dat  $A$  van  $B$  gewonnen heeft. Tegen de andere spelers heeft  $B$  dan een wedstrijd meer gewonnen dan  $A$ , zodat er zeker een speler  $C$  is die verloren is tegen  $B$ , maar gewonnen heeft tegen  $A$ . Deze spelers  $A$ ,  $B$  en  $C$  voldoen aan de vraag.

**Oplossing 3:** Maak een eindige rij van spelers, waarbij de volgende speler steeds verloren heeft van de vorige, en stop de rij als de laatst toegevoegde speler, zeg  $X$ , reeds eerder in de rij staat. Door van het eerste voorkomen in de rij van  $X$  te vertrekken, vinden we steeds een cyclus van spelers waarbij de volgende verloren heeft van de vorige. Zo'n cyclus heeft minstens lengte 3. Neem uit het ongerijmde aan dat de korste dergelijke cyclus  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow X_1$  die voorkomt een lengte heeft van  $k > 3$ . Als  $X_3$  gewonnen heeft van  $X_1$ , is  $X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_1$  echter een kortere cyclus. Als  $X_3$  verloren heeft van  $X_1$ , is  $X_1 \rightarrow X_3 \rightarrow \dots \rightarrow X_k \rightarrow X_1$  een kortere cyclus. We bekomen dus steeds een tegenspraak als  $k > 3$ , dus moet  $k = 3$ . Er bestaat dus steeds een korste cyclus met lengte 3, zoals gevraagd in de opgave.

4. *Deze vierde vraag, was relatief gemakkelijk. Ze werd zelf het beste beantwoord van alle vragen in de meicompentie.*

Het middelpunt van de ingeschreven cirkel van  $ADC$  noemen we  $I$ , en we schrijven

$$x = \angle CAI$$

Omdat dat middelpunt van de ingeschreven cirkel op de bissectrices van de hoeken van  $ADC$  ligt, is

$$\angle CAD = 2x$$

Omdat  $AD$  de bissectrice van  $\angle CAB$  is, geldt

$$\angle CAB = 4x$$

en bijgevolg ook

$$\angle IAB = 3x$$

$I$  is ook het middelpunt van de omschreven cirkel van  $ABC$ , dus is  $|AI| = |BI| = |CI|$ . De driehoek  $AIC$  is dus gelijkbenig, zodat

$$\angle ACI = \angle CAI = x$$

Omdat  $I$  het middelpunt van de ingeschreven cirkel van  $ADC$  is, is  $CI$  de bissectrice van  $\angle ACB$ , zodat

$$\angle ACB = 2x$$

Wegens de gelijkbenigheid van de driehoeken  $AIB$  en  $CIB$  geldt nu nog dat

$$\angle ABC = \angle ABI + \angle CBI = \angle BAI + \angle BCI = 3x + x = 4x$$

Bijgevolg is

$$\angle ABC = \angle CAB$$

en is de driehoek  $ABC$  gelijkbenig met tophoek  $C$ .

(Merk op dat uit het feit dat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan  $180^\circ$ , meteen volgt dat  $x = 18^\circ$ . Een veralgemening van de opgave is mogelijk (en werd ook door Mats Vermeeren en Frank Feys gegeven): ook als  $D$  willekeurig op  $[CB]$  ligt, moet  $ABC$  nog steeds gelijkbenig zijn. Het is dan wel niet meer mogelijk om de grootte van de hoeken te berekenen.)

5. De laatste vraag was een uitdagende getaltheorievraag, die relatief goed beantwoord werd.

Als

$$\sqrt{k^2 - pk} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

dan is er een  $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  zodat

$$k(k - p) = a^2$$

We onderscheiden nu twee gevallen

- Als  $p \mid k$  dan is ook  $p \mid a$ . Schrijf  $k = xp$  (met  $x \geq 2$ , anders is  $k^2 - pk \leq 0$ ) en  $a = yp$ . Er moet dan gelden dat

$$xp(xp - p) = (yp)^2$$

en dus

$$x(x - 1) = y^2$$

Aangezien echter

$$(x - 1)^2 < x(x - 1) < x^2$$

kan  $x(x - 1)$  echter nooit een volkomen kwadraat zijn. Contradictie.

- Als  $p \nmid k$ , dan zijn  $k$  en  $k - p$  onderling ondeelbaar. Omdat hun product een kwadraat is, moeten ze beide ook kwadraten zijn. Schrijf  $k = x^2$  en  $k - p = y^2$ . Dan is

$$p = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

Omdat  $p$  priem is, moet  $x - y = 1$ , en dus

$$p = x + y = 2x - 1 = 2\sqrt{k} - 1$$

Bijgevolg moet  $k = \frac{(p+1)^2}{4}$ . Omdat  $p$  oneven is, is  $p + 1$  even en is  $(p + 1)^2$  een veelvoud van 4. Deze  $k$  is dus steeds natuurlijk. Omdat bovendien

$$k(k - p) = \frac{(p + 1)^2}{4} \left( \frac{(p + 1)^2}{4} - p \right) = \frac{(p + 1)^2 (p - 1)^2}{4} = \left( \frac{p^2 - 1}{4} \right)^2$$

is deze  $k$  ook steeds een oplossing. We vinden dus steeds juist één  $k$  die aan de vraag voldoet.

Een oplossingen zonder de voorgaande opsplitsing in twee gevallen, kan ook gevonden worden door de voorwaarde te herschrijven als

$$4k^2 - 4kp + p^2 = 4a^2 + p^2$$

$$(2k - p - 2a)(2k - p + 2a) = p^2$$