Beloftencompetitie
Mei 2006

1. Bepaal alle functies f van de reële getallen naar de reële getallen, zodat voor alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt dat
$$f(x)f(y) = xy$$

2. $ABCD$ is een paralellogram. De punten P en Q liggen op de diagonaal AC waarbij $|AP| = |CQ| < \frac{1}{2}|AC|$. De rechte BP snijdt AD in E. De rechte $\mathbf{B}Q$ snijdt CD in F. Bewijs dat AC en EF evenwijdig zijn.

3. In een tennistoernooi met meer dan twee deelnemers, speelde elke deelnemer juist ééndmaal tegen elke andere deelnemer. Elke tennisser heeft minstens één wedstrijd gewonnen. Bewijs dat er drie deelnemers A, B en C zijn, zodat A heeft gewonnen tegen B, B heeft gewonnen tegen C en C heeft gewonnen tegen A.

4. ABC is een driehoek. Noem D het snijpunt van BC en de binnenbissectrice van hoek A. Het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ABC valt samen met het middelpunt van de ingeschreven cirkel van ADC. Bewijs dat ABC een gelijkbenige driehoek is.

5. Gegeven is een oneven priemgetal p. Bewijs dat er een uniek natuurlijk getal $k \neq 0$ bestaat zodat
$$\sqrt{k^2 - pk} \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$