

Oplossingen beloftencompetitie

April 2006

1. *Dit leuke raadsel werd (in iets andere vorm) gesteld op een voorronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade dit jaar. Voor de meeste deelnemers was het geen probleem om het goede antwoord te vinden.*

Nummer de hoeken van de schaatsbaan met de klok mee van 1 tot 4, waarbij Jantje start in de hoek met nummer 1. Door een zijde te schaatsen gaat hij steeds van een hoek met een oneven nummer naar een even nummer, of omgekeerd. De *pariteit* (even/oneven zijn) van het hoeknummer wisselt dus steeds.

Vanuit een hoek kan Jantje steeds verschillende twee kanten uitschaatsen. Om negen zijden te schaatsen, kan hij 9 keer uit 2 richtingen kiezen, er zijn dus 2^9 mogelijkheden om negen zijden te schaatsen. Na negen zijden is Jantje sowieso in een hoek met een even nummer, 2 of 4. Vanuit zo'n positie heeft hij steeds juist één mogelijkheid om terug in zijn startpositie terecht te komen. Het aantal mogelijkheden om tien zijden te schaatsen en terug in het beginpunt te komen, is dus gelijk aan het aantal mogelijkheden om willkeurig negen zijden te schaatsen, zijnde $2^9 = 512$.

2. *Deze vraag was een beetje een onconventionele meetkundevraag, in de zin dat de traditionele meetkundestellingen niet meteen toepasbaar waren. Een beetje creativiteit was nodig om het probleem toch beheersbaar te maken, wat leidde tot een aantal verschillende oplossingen die ingestuurd werden.*

Noem de hoekpunten van de driehoek X, Y, Z en de hoekpunten van het parallellogram A, B, C en D . Noteer voor het gemak de oppervlakte van $ABCD$ als $[ABCD]$ en de oppervlakte van een driehoek MNP als $[MNP]$.

We beschouwen eerst het lemma dat gegeven een rechte MN en een punt P op het parallellogram $ABCD$, er steeds een hoekpunt van het parallellogram is dat minstens even ver van MN ligt als P . Construeer immers de rechte evenwijdig aan MN door P . Het is duidelijk dat er steeds een hoekpunt van het parallellogram ofwel op de evenwijdige, ofwel aan de andere kant als MN ervan ligt. (Dit is intuïtief wel duidelijk genoeg. Wie dit echt strikt wil aantonen, kan uit het ongerijmde aannemen dat alle hoekpunten aan dezelfde kant van de evenwijdige liggen, en dan met de convexiteit van het parallellogram uitkomen dat de evenwijdige nooit P kan bevatten.)

Er bestaat dus steeds een hoekpunt U van het parallellogram dat minstens even ver ligt van XY als Z . Bijgevolg is ook $[XYZ] \leq [XYU]$. Analoog is er een hoekpunt V van het parallellogram dat minstens even ver ligt van XZ als Y , zodat $[XYU] \leq [XVU]$. En er is tot slot een hoekpunt W van het parallellogram dat minstens even ver van UV ligt als X , zodat $[XVU] \leq [WVU]$. We hebben dus het belangrijke resultaat

$$[ABC] \leq [UVW]$$

Als er bij W, V of U twee dezelfde punten zijn, is $[UVW] = 0$ en dus ook $[ABC] = 0$ wat zeker voldoet aan het gevraagde. Als W, V en U verschillende hoekpunten van het parallellogram zijn, dan is duidelijk dat $[WVU] = \frac{1}{2}[ABCD]$ en dus $[ABC] \leq \frac{1}{2}[ABCD]$, wat gevraagd was.

(Er zijn verschillende andere benaderingen mogelijk. Mats Vermeeren nam het eenvoudig te bewijzen geval waarbij twee punten van de driehoek op dezelfde zijde van het parallellogram liggen als basisstap. Voor het andere geval, construeerde hij een nieuwe parallellogram met een kleinere oppervlakte, zodat wel aan dat basisstap voldaan werd. Didier Snoek bewees het mooie resultaat dat als $X = A, Y \in BC$ en $Z \in CD$, dan $2 \cdot [XYZ] = [ABCD] - |BY| \cdot |ZD|$.)

3. *Tussen de (helaas weinige) inzendingen vonden we enkel bij Frank Feys een goede oplossing van deze, nochtans niet zo moeilijke, meetkundevraag.*

Merk op dat zwaartelijnen AM , BM en CP elkaar snijden in het zwaartepunt Z . Overstaande hoeken van een koordenvierhoek zijn supplementair, en hoeken die samen een gestrekte hoek vormen natuurlijk ook. Daarom is

$$\begin{aligned}\angle ZMC &= 180^\circ - \angle ZMB \\ &= \angle ZPB \\ &= 180^\circ - \angle ZPA \\ &= \angle ZNA \\ &= 180^\circ - \angle ZNC\end{aligned}$$

Bijgevolg is ook $CNZM$ een koordenvierhoek.

Omdat $\angle MAC = \angle NAZ$ (dezelfde hoek) en $\angle CMA = \angle CMZ = \angle ZNA$ (zie hiervoor) zijn driehoeken AMC en ANZ gelijkvormig. Daarom is

$$\frac{|AM|}{|AN|} = \frac{|AC|}{|AZ|}$$

Omdat N het midden is van AC , geldt $|AN| = \frac{1}{2}|AC|$. Door dit in te vullen, krijgen we

$$\begin{aligned}\frac{2|AM|}{|AC|} &= \frac{|AC|}{|AZ|} \\ |AC|^2 &= 2|AM||AZ|\end{aligned}$$

Door analoog met de gelijkvormige driehoeken AMB en APZ te werken, vinden we

$$|AB|^2 = 2|AM||AZ|$$

en dus

$$|AB| = |AC|$$

Helemaal analoog vinden we

$$|BC| = |BA|$$

zodat we kunnen besluiten dat de driehoek ABC gelijkzijdig is.

4. *De vierde vraag was een vrij standaard toepassing van de AM/GM-ongelijkheid, maar toch van een niet te onderschatten moeilijkheid. Voor beloften is het allesbehalve evident om het goede inzicht te hebben. De enige goede antwoorden kwamen van Frank Feys en Didier Snoeck, beiden ironisch genoeg met een uiterst omslachtige en bombastische methode met partieel afgeleiden. Helaas wordt dat er op school zo ingestampt, dat elegante oplossingen met AM/GM een zelfzaamheid worden.*

Wegens de ongelijkheid tussen rekenkundig en meetkundig gemiddelde is

$$\begin{aligned}1 + x &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}} \\ x + y &= x + \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xy^2}{4}} \\ y + z &= y + \frac{z}{2} + \frac{z}{2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{yz^2}{4}} \\ z + 16 &= z + 8 + 8 \geq 3\sqrt[3]{64z}\end{aligned}$$

Door deze ongelijkheden te vermenigvuldigen, en omdat alle factoren positief zijn, is

$$(1+x)(x+y)(y+z)(z+16) \geq 3^4 \sqrt[3]{\frac{64x^3y^3z^3}{4^3}} = 81xyz$$

Bijgevolg is

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)} \leq \frac{xyz}{81xyz} = \frac{1}{81}$$

Deze bovengrens wordt ook bereikt, want als we $x = 2$, $y = 4$, $z = 8$ nemen, is

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)} = \frac{64}{(3)(6)(12)(24)} = \frac{1}{81}$$

(Deze waarden voor x, y, z zijn gemakkelijk te vinden omdat bij de ongelijkheid tussen rekenkundig en meetkundig gemiddelde er enkel gelijkheid is als alle variabelen gelijk zijn.)

5. *De vijfde vraag was een boeiend maar moeilijk probleem uit de getaltheorie. Merkwaardig genoeg liep het voor velen al fout bij het correct begrijpen van de opgave. Enkel Mats Vermeeren kon een stap in de goede richting zetten.*

Noteer voor het gemak $f(a, b) = \frac{a+b}{\text{ggd}(a, b)}$.

Omdat $f(2, 2) = 2$, is het singleton $\{2\}$ een verzameling die aan de voorwaarde voldoet. Neem verder aan dat $V \neq \{2\}$.

Alle andere deelverzamelingen V van $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ hebben zeker een element $x \neq 2$. Dan volgt dat $f(x, x) = 2$ ook een element van V is. We bewijzen nu dat V sowieso een oneven element y heeft. Als x oneven is, $y = x$. Als x even is, definieer dan de rij (x_n) door $x_1 = x$ en $x_{n+1} = f(2, x_n)$ als $n \geq 1$. Het is duidelijk dat alle elementen van de rij, ook element van V moeten zijn. Stel uit het ongerijmde dat de rij alleen maar even elementen bevat. Dan is $x_{n+1} = \frac{2+x_n}{2}$ het gemiddelde van 2 en x_n . Omdat $x_1 > 2$ volgt met eenvoudige inductie dat ook alle $x_n > 2$. Daarom is steeds $2 < x_{n+1} < x_n$. Bijgevolg is (x_n) een strikt dalende rij van natuurlijke getallen, maar omdat er slechts eindig veel natuurlijke getallen kleiner dan x_1 zijn, is dit onmogelijk. De rij (x_n) bevat bijgevolg zeker een oneven element y , dat door de constructie van (x_n) ook een element van V moet zijn.

We hebben dus dat 2 en een oneven getal y beide element zijn van V . Voor elke oneven $z \in V$ is dan ook

$$f(z, 2) = \frac{z+2}{1} = z+2$$

een element van V . Bijgevolg (triviale inductie) is elk oneven getal groter dan y een element van V . Voor elke $n \geq 1$ is dus ook

$$f(y, (2n-1)y) = \frac{y+(2n-1)y}{y} = 2n$$

een element van V . Alle even getallen zitten dus zeker in V . Bijgevolg is ook voor elke $n \geq 1$

$$f(2n, 2) = \frac{2n+2}{2} = n+1$$

een element van V .

V bevat dus steeds alle natuurlijke getallen groter dan 1, zodat er nog twee mogelijke verzamelingen V overblijven. $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ bevat alle natuurlijke getallen en voldoet dus zeker aan de voorwaarde. Ook $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ in overeenstemming met de voorwaarde. Voor alle x, y geldt immers dat $\text{ggd}(x, y) \leq x$ en $\text{ggd}(x, y) \leq y$, en dus $f(x, y) \geq 2$, zodat er nooit geëist wordt dat $1 \in V$.

De mogelijke verzamelingen V zijn dus $\{2\}$, $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ en $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.