

Beloftencompetitie
April 2006

1. Jantje begint te schaatsen in een hoek van een rechthoekige schaatsbaan. Omdat hij zich onwennig voelt op het ijs, schaatst hij steeds langs een zijkant van hoek naar hoek. Op hoeveel manieren kan hij, na juist 10 zijden te hebben afgeschaatst, terug bij zijn beginpunt uitkomen?
2. Kies willekeurig drie punten op de zijden van een parallellogram. Bewijs dat de oppervlakte van de driehoek gevormd door de drie punten, ten hoogste de helft is van de oppervlakte van het parallellogram.
3. ABC is een driehoek met zwaartepunt Z . M , N en P zijn de middens van respectievelijk BC , CA en AB . Er is gegeven dat $APZN$ en $BMZP$ koordenvierhoeken zijn. Bewijs dat ABC gelijkzijdig is.
4. Zij x, y, z positieve reële getallen. Vind de maximale waarde van

$$\frac{xyz}{(1+x)(x+y)(y+z)(z+16)}$$

5. Vind alle niet-lege deelverzamelingen V van $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ zodat voor elke $a, b \in V$ geldt dat

$$\frac{a+b}{\text{ggd}(a,b)} \in V$$

Hierbij staat $\text{ggd}(a, b)$ voor de grootste gemene deler van a en b .