Beloftencompetitie: oplossingen
Maart 2006

1. *In de maartcompetitie werden opvallend veel onnauwkeurig genoteerde oplossingen ingestuurd. Ook eerste vraag werd over het algemeen wel goed opgelost, maar vaak slecht opgeschreven. Zo ontbrak bij verschillende deelnemers de uitleg waarom pakweg* $1001 \cdot 1005 < 1003^2$.

   Herschrijf het linkerlid van het te bewijzen als

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2005 \cdot 2006 = 1003 \cdot 2005 \cdot 2006 \cdot (2 \cdot 2004)(3 \cdot 2003) \cdots (1002 \cdot 1004)$$

   Omdat voor alle $n \neq 0$ geldt dat $(1003 - n)(1003 + n) = 1003^2 - n^2 < 1003^2$, is

$$(2 \cdot 2004)(3 \cdot 2003) \cdots (1002 \cdot 1004) < 1003^{2002} \tag{1}$$

   Verder is $2 \cdot 2005 = 10 \cdot 401 < 1003^2$ en dus

$$1003 \cdot 2005 \cdot 2006 = 1003^2 \cdot 2005 \cdot 2 < 1003^4 \tag{2}$$

   Het product van (1) en (2) levert het te bewijzen.

   Een aantal deelnemers bewezen de ongelijkheid met behulp van inductie en de ongelijkheid van Bernouilli. Dit is ook een correct antwoord, maar wel veel minder elegant dan de bovenstaande modeloplossing.

2. *Voor de opvallende gelijkheid in vraag 2, bestaat het volgende elegante bewijsje.*

   Neem een willekeurig oneven getal k kleiner dan $2n$. Als $2^p k \leq n$ dan is $2^{p+1}k \leq 2n$. Bijgevolg is er voor elke k een $p_k \in \mathbb{N}$ zodat $n + 1 \leq 2^{p_k} k \leq 2n$. Omdat vermenigvuldigen met 2 de grootste oneven deler niet wijzigt, geldt $f(2^{p_k} k) = f(k)$. De grootste oneven deler van een oneven getal is het getal zelf, dus $f(2^{p_k} k) = k$. Deze n oneven getallen kleiner dan $2n$ komen dus elk een keer voor tussen de n functiewaarden in de som. Bijgevolg is

$$f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n\frac{1 + (2n-1)}{2} = n^2$$

   De volgende alternatieve oplossing, met inductie, werd door de meeste deelnemers ingestuurd. Veel inductiebewijzen waren echter slecht gestructureerd. Vaak werd van de te bewijzen gelijkheid naar een triviale gelijkheid toegewerkt, wat niet de goede richtig is. Neem bijvoorbeeld het volgende bewijs dat $1 = 2$*: "vermenigvuldig beide leden met* 0*, je krijgt* $0 = 0$*, wat waar is, dus is ook* $1 = 2$*..."*

   We bewijzen de stelling met behulp van inductie. Voor $n = 1$ geldt duidelijk dat

$$\sum_{i=n+1}^{2n} f(i) = f(2) = 1 = n^2$$

   Neem nu aan dat de stelling geldt voor $n = k$ en stel $n = k + 1$. Er geldt dat

$$\sum_{i=k+2}^{2(k+1)} f(i) = \sum_{i=k+1}^{2k} f(i) + f(2k+1) + f(2k+2) - f(k+1)$$

   Volgens de inductiehypothese is

$$\sum_{i=k+1}^{2k} f(i) = k^2$$

   Vermenigvuldiging met 2 wijzigt de grootste oneven deler niet, bijgevolg is

$$f(2k+2) - f(k+1) = 0$$

Tenslotte is $2k+1$ oneven, en is $2k+1$ dus de grootste oneven deler van zichzelf, zodat

$$f(2k+1) = 2k+1$$

Dit geeft samen dat

$$\sum_{i=k+2}^{2(k+1)} f(i) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

zodat de stelling ook geldt voor $n = k+1$, en volgens het pricipe van inductie dus voor alle natuurlijke getallen.

3. *De derde vraag bleek een pak moeilijker te zijn dan de vorige twee. Enkel Gert-Jan Dugardein gaf een perfecte oplossing.*

   Noteer $a \equiv b \mod 9$ als a en b dezelfde rest geven bij deling door 9. Noteer met $\overline{z \cdots cba}$ het getal met decimale schrijfwijze $z \cdots cba$.

   Schrijf $x = \overline{z \cdots cba}$ (n cijfers). Dan is

$$\begin{aligned} x &= 10^n z + \cdots + 100c + 10b + a \\ &= (9 \cdots 99 + 1)z + \cdots (99+1)c + (9+1)b + a \\ &\equiv z + \cdots c + b + a \mod 9 \\ &\equiv s(x) \mod 9 \end{aligned}$$

   x en $s(x)$ geven dus steeds dezelfde rest bij deling door 9. (Een gevolg hiervan is het gekende regeltje dat een getal deelbaar is door 9 als en slechts als de som van de cijfers deelbaar is door 9.)

   Opdat $n = s(a) = s(a+b)$ moet dus

$$a \equiv a + b \mod 9$$

   en bijgevolg

$$b \equiv 0 \mod 9$$

   Omdat $n = s(b)$ moet nu ook

$$n \equiv 0 \mod 9$$

   n is dus zeker een veelvoud van 9.

   We tonen nu aan dat elk veelvoud van 9 ook een mogelijke oplossing is. Schrijf $n = 9m$ en neem $a = b = 9 \cdots 999$ (m cijfers 9). Dan is $a + b = 199 \cdots 998$ ($m-1$ cijfers 9). Dan is inderdaad

$$s(a) = s(b) = s(a+b) = 9m = n$$

4. *Hoewel veel deelnemers goede ideeën hadden, bleek het bij de vierde vraag bijzonder moeilijk om het antwoord goed en nauwkeurig op te schrijven. Enkel Ramses Verachtert gaf een perfecte oplossing. Bij deel a stuurde iedereen ingewikkelde constructies in, en kwam helaas niemand op het idee om de kortste zijde te beschouwen. Bij deel b werden veel onnauwkeurigheden gemaakt. Bij kan bekijken van de lijnen die samenkomen in een punt, vergat men bijvoorbeeld vaak de lijn die vanuit dat punt getrokken werd.*

   (a) Stel uit het ongerijmde dat er wel een veelhoek met n hoeken gevormd wordt door bepaalde lijnen. Omdat geen twee café's even ver van elkaar liggen, heeft de veelhoek een kortste zijde, zeg AB. Omdat dit de korste zijde is, wordt er zowel een lijn getrokken van A naar B als van B naar A. De $n-2$ lijnen die uit de $n-2$ overgebleven punten getrokken worden, moeten dan voor de $n-1$ overgebleven (niet AB) zijden zorgen, wat duidelijk niet mogelijk is. Er kan dus geen veelhoek gevormd worden.

(b) Stel uit het ongerijmde dat er minstens zes lijnen samenkomen in A. Noem het café dat het kortst bij A ligt P_1. Kies vijf andere punten van waaruit een lijn naar A getrokken werd, en noem deze, vanuit P_1 met de klok mee rond A draaiend, $P_2, P_3, \cdots, P_6$. (Merk op dat de hoek die twee beschouwde punten met A maken nooit nul kan zijn, want dan kan het verste punt nooit met A verbonden worden.)

P_1AP_2 is nu een driehoek waarbij $|AP_1| < |AP_2|$ want er werd een lijn getrokken uit A naar P_1. Ook is $|P_2A| < |P_2P_1|$ want er werd een lijn getrokken uit P_2 naar A. P_1P_2 is dus de langste zijde van de driehoek, en die staat tegenover de grootste hoek. Daarom is $\angle P_1AP_2 > 60°$ (de aarde is immers plat). Analoog is $\angle P_1AP_6 > 60°$.

P_2AP_3 is een driehoek waarbij $|P_2A| < |P_2P_3|$ en $|P_3A| < |P_3P_2|$ want er werd een lijn getrokken uit zowel P_2 als P_3 naar A. P_2P_3 is dus de langste zijde van de driehoek, zodat $\angle P_2AP_3 > 60°$. Analoog is $\angle P_3AP_4 > 60°$, $\angle P_4AP_5 > 60°$ en $\angle P_5AP_6 > 60°$.

De volle hoek rond A meet $360°$, maar deze kan ook geschreven worden als

$$\angle P_1AP_2 + \angle P_2AP_3 + \angle P_3AP_4 + \angle P_4AP_5 + \angle P_5AP_6 + \angle P_6AP_1 > 6 \cdot 60° = 360°$$

wat een tegenspraak is. Er kunnen dus niet meer dan vijf lijnen samenkomen in een punt.

5. *De meetkundevraag was waarschijnlijk wat te moeilijk voor de beloftencompetitie. Niemand kon een correct bewijs geven. Verschillende deelnemers maakten een fout door in hun antwoord reeds te gebruiken dat het snijpunt op AD ligt, een feit dat ze juist wilden bewijzen.*

Zij F het snijpunt van AD met de rechte door C evenwijdig aan AE. Het is nu voldoende te bewijzen dat de rechte FB evenwijdig is met DE.

Zij P het snijpunt van DE en AB. Zij Q het snijpunt van AE en DC. Omdat FC en AQ evenwijdig zijn, geldt volgens de stelling van Thales dat

$$\frac{AF}{FD} = \frac{QC}{CD} \tag{3}$$

Wegens de gelijkvormigheid van de driehoeken CEQ en BEA geldt

$$\frac{CQ}{AB} = \frac{CE}{EB}$$

Wegens de gelijkvormigheid van de driehoeken CED en BEP is bovendien

$$\frac{CE}{EB} = \frac{CD}{BP}$$

Hieruit besluiten we dat

$$\frac{CQ}{CD} = \frac{AB}{BP}$$

Wegens (3) geldt er nu dat

$$\frac{AF}{FD} = \frac{AB}{BP}$$

Volgend de stelling van Thales volgt hieruit dat FB en $DP = DE$ evenwijdig zijn, wat voldoende is voor het bewijs.