Beloftencompetitie
Maart 2006

1. Bewijs dat
$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 2005 \cdot 2006 < 1003^{2006}$$

2. Definieer $f(n)$ als de grootste oneven deler van n voor alle natuurlijke getallen n groter dan 0. Toon aan dat:
$$f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) = n^2$$

3. Voor alle natuurlijke getallen m definiren we $s(m)$ als de som van de cijfers van m. Voor welke natuurlijke getallen n bestaan er getallen a en b zodat
$$s(a) = s(b) = s(a+b) = n \quad ?$$

4. Piet maakt een kaart waarop alle café's in Vlaanderen worden aangeduid. Om gemakkelijk van het ene café naar het andere te kunnen wandelen, trekt hij uit elk café een lijn naar het (unieke) café dacht het kortst bij ligt. (De afstand tussen twee café's is dus steeds verschillend. En voor zij die eraan twijfelen: de aarde is wel degelijk plat.)
   (a) Toon aan dat de lijnen nooit een veelhoek kunnen vormen.
   (b) Toon aan dat er nooit meer dan vijf lijnen samenkomen in een café.

5. Zij $ABCD$ een trapezium waarbij AB en DC evenwijdig zijn. Kies willekeurig een punt E op de zijde BC. Bewijs dat de rechte uit B evenwijdig aan DE en de rechte uit C evenwijdig aan AE elkaar snijden op de zijde AD.