Beloftencompetitie: oplossingen
Februari 2006

1. *De februari-competitie was moeilijker dan gewoonlijk, aan de lagere scores te zien. Aan de meetkundevraag lag dat echter niet: deze werd door alle deelnemers volledig correct opgelost. Jullie hebben erom gevraagd: in maart is er weer een moeilijke meetkundevraag.*

   De driehoek CAD is gelijkbenig dus zijn de basishoeken $\angle ADC$ en $\angle ACD$ gelijk. Omdat de som van de hoeken van een driehoek gelijk is aan 180°, geldt dat $\angle CAB = 180° - 2\angle ACD$. Analoog is $\angle CBA = 180° - 2\angle ACE$.

   In de rechthoekige driehoek ABC geldt dat $\angle CBA + \angle CAB = 90°$, wat na substitutie geeft dat $360° - 2\angle ACD - 2\angle ACE = 90°$. Na uitwerking geeft dit $\angle ACD + \angle ACE = 135°$. Er moet echter ook gelden dat $\angle ACD + \angle ACE - \angle DCE = \angle ACB = 90°$. Daarom is $\angle DCE = 135° - 90° = 45°$.

2. *Dit leuke, kleine getaltheorievraagje werd door de meeste deelnemers correct opgelost. Je kan het bewijs uit veel verschillende invalshoeken voeren, maar meestal komt het neer op de volgende modeloplossing.*

   Uit
   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$$
   volgt dat
   $$ad + bc = bd$$
   en dus dat
   $$ad = b(d - c)$$
   Bijgevolg is b een deler van ad. Omdat a en b echter onderling ondeelbaar zijn, moet b een deler zijn van d. Volgens de definitie van *deler* moet dan gelden dat $b \leq d$.

   Analoog verkrijgen we uit
   $$bc = d(b - a)$$
   dat d een deler is van b en dus dat $d \leq b$.

   Omdat $b \leq d$ en $d \leq b$ beiden moeten gelden, is $d = b$.

3. *De derde vraag bleek verrassend moeilijk te zijn, enkel Mats kon een volledig bewijs vinden. Bij het oplossen van vragen als deze, is het steeds nuttig om te proberen met bepaalde cijfertjes wél* 16 *verschillende resten te bekomen. Daaruit kan je gemakkelijker het inzicht krijgen* waarom *dat toch niet mogelijk is.*

   Noem de drie gebruikte cijfers A, B en C. Stel uit het ongerijmde dat we toch 16 getallen met verschillende resten bij deling door 16 kunnen vinden. Als de drie cijfers allen even of allen oneven zijn, kunnen de oneven resp. even resten nooit verkregen worden. Er is dus juist één cijfer oneven of juist één cijfer oneven. We geven de redenering voor één even cijfer (zeg A). Het bewijs voor één oneven cijfer verloopt analoog.

   Er zijn 8 even resten bij deling door 16. Deze moeten alleen verkregen worden door de negen getallen die eindigen op A: AAA, ABA, ACA, BAA, BBA, BCA, CAA, CBA en CCA.

   Beschouw van deze negen getallen de zes getallen met géén cijfer A in het midden. Aangenomen dat de drie andere getallen (met wel een cijfer A in het midden) het maximum van 3 verschillende resten geven, moeten de zes getallen nog minstens $8 - 3 = 5$ verschillende resten leveren bij deling door 16.

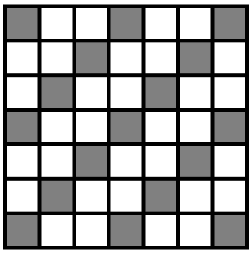
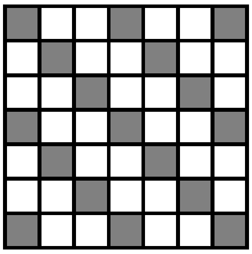
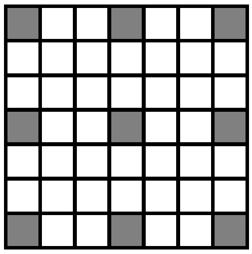
   Bekijk de onderlinge verschillen van de zes beschouwde getallen. Elk onderling verschil is een veelvoud van 10 (want het laatste cijfer van elk getal is A). Sterker: elk onderling verschil is een veelvoud van 20, want het cijfer van de tientallen van elk getal oneven. Bekijk nu van de zes getallen de rest bij deling door 80. Er zijn slechts vier verschillende resten mogelijk omdat elk onderling verschil een veelvoud is van 20 en omdat $4 \cdot 20 = 80$. Omdat 80 bovendien een veelvoud is van 16, kunnen de zes getallen ook slechts vier verschillende resten geven bij deling door 16. Dit is in tegenspraak met het vereiste aantal van 5 verschillende resten. Het is dus niet mogelijk om 16 verschillende resten te verkrijgen, wat te bewijzen was.

4. *De vraag van het 7×7-rooster bleek een verraderlijke valkuil te zijn. Het oplossen van een dergelijke vraag gebeurt in twee delen: aantonen dat bepaalde vakjes* wél *mogelijk zijn, en aantonen dat alle andere vakjes* niet *mogelijk zijn. Die tweede stap is meestal de moeilijkste en belangrijkste, maar deze werd door de meeste deelnemers overgeslagen of onderschat. De techniek van het inkleuren van de vakjes, zoals in de modeloplossing hieronder, blijkt helaas vrij onbekend te zijn.*

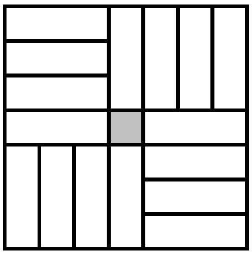
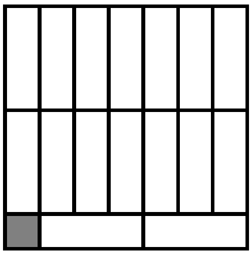
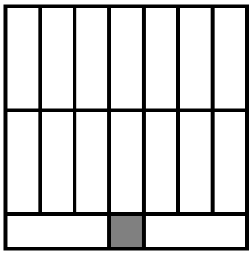
   Merk op dat we met 16 rechthoekjes van 1×3 en één vierkant van 1×1 een maximale oppervlakte van $16 \cdot 3 + 1 = 49 = 7 \cdot 7$ kunnen bedekken. Als we het volledige rooster willen bedekken, dan mogen er dus geen overlappingen zijn.

   Kleur het rooster nu in, zodat de hoeken grijs gekleurd zijn, en zodat zowel vertikaal als horizontaal juist om de drie vakjes één vakje grijs is. (Dit kan op manieren (a) en (b).) Zo bevat elke 3×1 rechthoek juist één grijs vakje. Er zijn echter 17 grijze vakjes voor 16 rechthoeken. Het vierkant moet dus op een grijs vakje staan in zowel (a) als (b).

   Er blijven dus nog negen niet-geëlimineerde plaatsen voor het vierkantje over: helemaal in het midden, op een van de hoekpunten, of in het midden van een van de zijden. (Zie (c).)

(a) 
(b) 
(c) 

   De volgende tekeningen tonen aan dat dit ook allemaal mogelijkheden zijn.

(c) 
(d) 
(e) 

5. *Een analoge vraag als deze werd in 1968 gesteld op de International Mathematical Olympiad. Hoewel de IMO toen nog niet van het huidige niveau was, blijft dit natuurlijk een moeilijke vraag. Enkel Gert-Jan kon het probleem grotendeels oplossen. Helaas vond niemand het handige trucje $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$.*

   We noteren met $\lfloor x \rfloor$ nog steeds het grootste natuurlijk getal dat kleiner dan of gelijk aan x is. Bovendien noteren we het decimale gedeelte van x als $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Omdat $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ geldt dat $0 \leq \{x\} < 1$. Bijvoorbeeld is $\lfloor 1.23 \rfloor = 1$ en $\{1.23\} = .23$.

   We bewijzen eerst dat $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$ voor alle reële getallen x. Hiervoor onderscheiden we twee gevallen.

- Als $\{x\} < \frac{1}{2}$ geldt dat $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$. Bovendien is $2\{x\} = \{2x\}$ en dus ook $\lfloor 2x \rfloor = 2x - 2\{x\} = 2\lfloor x \rfloor$. Bijgevolg is inderdaad

$$\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

- Als $\{x\} \geq \frac{1}{2}$ geldt dat $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$. Bovendien is $2\{x\} = 1 + \{2x\}$ en dus ook $\lfloor 2x \rfloor = 2x - 2\{x\} + 1 = 2\lfloor x \rfloor + 1$. Bijgevolg is inderdaad

$$\lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor - \lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1 = \left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

De gelijkheid $\lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor = \lfloor 2x \rfloor - \lfloor x \rfloor$ geldt dus steeds.

We schrijven nu de gegeven som uit als

$$\left\lfloor \frac{n + 2^0}{2^1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n + 2^1}{2^2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n + 2^{2005}}{2^{2006}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2^1} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} + \frac{1}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^{2006}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Door de hiervoor bewezen gelijkheid is dit ook gelijk aan

$$\lfloor n \rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^3} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2^{2005}} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{2^{2006}} \right\rfloor$$

Omdat $\lfloor n \rfloor = n$ en door de termen twee aan twee te schrappen blijft er enkel

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2^{2006}} \right\rfloor$$

over. De opgave is nu herleid tot het vinden van alle natuurlijke getallen n waarvoor

$$n - \left\lfloor \frac{n}{2^{2006}} \right\rfloor = n$$

wat equivalent is met $\left\lfloor \frac{n}{2^{2006}} \right\rfloor = 0$. Dit geldt als en slechts als $n < 2^{2006}$. De gezochte natuurlijke getallen zijn dus alle getallen kleiner dan 2^{2006}.